



Aplicação da Teoria dos Jogos Cooperativos como Modelo do Equacionamento de Déficit Atuarial em Planos de Benefício Definido

HELENA CRISTINA SOARES LOURENÇO

Universidade Federal de Pernambuco

MAURÍCIO ASSUERO LIMA DE FREITAS

Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

As Entidades Fechadas de Previdência Complementar têm papel essencial para a qualidade de vida da população, pois complementa a renda após a vida laboral dos participantes oferecendo um padrão de vida diferenciado. Existem três modalidades de planos de pensão: contribuição definida (CD), benefício definido (BD) e contribuição variável (CV). Os planos de BD e CV estão expostos a diferentes tipos de riscos, como os financeiros, biométricos e as premissas atuariais, contribuindo para a volatilidade do plano gerando, desta forma, o desequilíbrio financeiro e atuarial do plano. O objetivo deste trabalho é propor modelo de equacionamento de déficit, cooperando, desta forma, para o equilíbrio do plano, assegurando a capacidade de pagamento dos benefícios futuros aos participantes. O modelo utilizará Teoria de Jogos Cooperativos empregando solução de valor de Shapley, uma vez que este tipo de metodologia é utilizado em diversos setores com a finalidade de alocação de custos de forma mais justa. Foi proposto um estudo de caso com 3 participantes, no qual foi estabelecido o valor máximo de cada participantes, valor a ser contribuído de fato pelos participantes e o excedente do participante. Aplicando a metodologia proposta observou-se que o novo arranjo beneficiou 2 participantes, penalizando o 3, fato este que uma necessidade de aumento na contribuição da ordem de 77% para equilíbrio do déficit.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos; Equacionamento de Déficit; Plano de Benefício Definido.

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais preocupações com as quais o ser humano depara-se ao longo de sua existência é a incessante busca pela segurança. De forma recorrente, um indivíduo preocupa-se não somente consigo, mas também com sua família, com suas posses. Os seguros de vida, patrimonial, de saúde, são estratos dessa preocupação.

Mudanças de hábitos, avanços tecnológicos e maiores desenvolvimentos nos serviços sociais e de saúde trouxeram, como consequência, o aumento da expectativa de vida da população, mas, aparentemente, o país não estava preparado para conviver com uma população centenária. A longevidade traz impactos previdenciários e pode se constituir numa fonte de insegurança econômica, à medida que as pessoas vivendo além da idade que lhes possibilita uma situação financeira capaz de sustentar a si e aos seus dependentes, ficam à mercê de alternativas para manutenção do padrão de vida, dado que os esquemas de seguridade social fornecem um atendimento previdenciário básico



ofertando apenas um piso de proteção social, sendo esta a fonte de ameaça do bem estar daqueles que saem da atividade laboral.

Utilizando os conceitos do ciclo de vida econômico, Clark *et al* (2004), afirmam que a vida das pessoas é marcada por três grandes fases A, B e C. Duas dessas fases são dependentes e deficitárias, infância/juventude e a velhice, e correspondem as fases A e C respectivamente, e uma terceira fase é ativa e superavitária correspondente a fase B, do ponto de vista orçamentário. Desse modo, a fim de assegurar a sobrevivência, o excesso produzido pela população em idade ativa deverá ser acumulado para usufruir em momento futuro ou cedido para as coortes dependentes.

Neste contexto, destaca-se a importância da previdência complementar fechada, as quais formam um segundo pilar no esquema da seguridade social. As Entidades Fechadas de Previdência Complementar – EPFC's são entidades sem fins lucrativos, designadas também como Fundo de Pensão, constituídas por uma empresa ou por uma entidade de classe sindical, com a finalidade de conceder benefícios de caráter previdenciário. Esses fundos têm papel essencial para a qualidade de vida da população, pois complementam a renda após a vida laboral dos seus participantes possibilitando um padrão de vida diferenciado. Além disso, os fundos de pensão são também provedores de grande magnitude dos investimentos na economia, tendo em vista a aplicabilidade de seus recursos em diferentes setores da economia tais como industrial, imobiliário e serviços fomentando desenvolvimento e progresso pois são formadores de poupança de qualquer economia.

Os planos de previdência complementar estão expostos a diferentes tipos de riscos como os financeiros (taxa de juros, meta atuarial e rendimentos dos ativos investidos), biométricos (expectativa de vida, aderência das tábuas biométricas) e as premissas adotadas pelo plano (taxa de rotatividade, crescimento salarial). A fim de garantir a finalidade dos fundos de pensão, é necessário acompanhamento rigoroso destes riscos uma vez que são responsáveis em grande parte pelas causas da volatilidade dos seus resultados.

Não se pretende, aqui, definir cada tipo de risco e sua forma de gerenciamento, nem mesmo calcular valor do resultado dos planos, por isso o foco é propor modelo de equacionamento de déficit, isto é, valor descoberto do plano, cooperando, desta forma, para o equilíbrio financeiro e atuarial, assegurando a capacidade de pagamento dos benefícios futuros aos participantes.

Este estudo visa contribuir de forma inovadora para o equacionamento dos déficits de planos de Benefício Definido (BD) fazendo uso das ferramentas de Teoria Jogos Cooperativos empregando solução de valor de Shapley, uma vez que este tipo de metodologia é utilizado em diversos setores da economia, no setor de energia elétrica, sistema de trânsito, sistemas de telecomunicações com a finalidade de alocação de custos. Este tipo de jogo também já foi aplicado a outros problemas atuariais no passado. Lemaire (1984) foi pioneiro, aplicando a ideia ao cálculo do prêmio e à alocação de custos em uma companhia de seguros, e Alegre e Claramunt (1995) estenderam a ideia à alocação do custo de solvência em anuidades de grupo.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO DAS EFPC's NO BRASIL

No Brasil, o Regime de Previdência Privada, de caráter complementar e organizado de forma autônoma em relação ao regime geral de previdência social, é facultativo, baseado na constituição de reservas que garantam o benefício contratado, e regulado por lei complementar (LC N° 109/2001), em consonância ao artigo 202 da Constituição Federal de 1988.



Este regime é operado pelas Entidades Fechadas de Previdência Complementar -EFPC as quais são estruturadas como Fundação ou Sociedade Civil e são criadas com o objetivo único de administrar Planos de Benefícios nos moldes estabelecidos pelo órgão regulador e fiscalizador para pagar benefícios aos participantes no momento da inatividade. No entanto estes Planos estão disponíveis apenas a grupos específicos, com base no vínculo empregatício ou associativo.

McGill *et al* (2010) estrutura os planos de previdência privada em quatro modalidades: i) Planos de Benefício Definido - BD, ii) Planos de Contribuição Definida - CD, iii) Plano Híbrido (comumente chamado de Contribuição Variável - CV), e iv) Planos Individuais com benefícios fiscais. Na Lei Complementar supracitada, as Entidades de Previdência Complementar somente podem instituir e operar Planos de Benefícios para os quais tenham autorização do órgão regulador e fiscalizador e os planos que poderão ser implementados deverão ser na modalidade BD, CD ou CV.

Os Planos CD são totalmente financiados, isto é, neste tipo de plano decide-se o valor da contribuição que o participante deverá arcar a partir do momento da sua adesão (pode ser alterada ao longo da vida laboral) e os benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos.

Segundo Rodrigues e Lima (2014) em Planos de Contribuição Definida não há volatilidade de passivo e não há criação de exigibilidades, uma vez que o ativo deste tipo de Plano é a variável independente, na medida em que o benefício é a função da capacidade de acumulação do participante e dos ganhos de capital oriundos dos investimentos. Nos planos CD não há solidariedade, tendo como uma de suas características fundamentais a individualidade dos recursos garantidores.

Nos Planos BD, o valor ou nível do benefício é definido no instante em que há adesão do indivíduo ao plano, e suas contribuições irão variar conforme alíquota definida em regulamento ou em cálculos atuarias ao longo da sua vida laboral para que o benefício pré-determinado seja atingido. Observa-se que as características dos planos CD são diferentes daquelas vistas em planos de benefício definido.

Rodrigues e Lima (*op.cit*) afirmam que poderão incorrer neste tipo de plano novas exigibilidades, demandando, desta forma, maior volume de ativos de investimentos ocasionado pela volatilidade do passivo. A volatilidade do Plano BD está intrinsecamente relacionada, segundo Garcia e Simões (2010) a questões de evolução da população, salários, alterações, dentre outras.

Em planos BD o passivo é a variável independente, tendo a área de investimentos do fundo de pensão de buscar resultados econômicos que compensem a necessidade adicionais causadas por essas volatilidades. Em virtude desta assimetria é que ocorrem as situações de déficit e superávit dos planos. De forma distinta à modalidade CD, os planos BD possuem como uma das suas características básicas a solidariedade e mutualismo, isto é, o patrimônio do plano pertence a todos os participantes deste plano de benefícios bem como a responsabilidade de sanar qualquer tipo de desequilíbrio decorrente dos ricos inerente a este de tipo de plano.

Já a modalidade de Planos de Contribuição Variável, apresenta características híbridas dos dois planos supracitados. Possui característica de Plano de Contribuição definida quando na fase de acumulação de recursos e características de Plano de Benefício Definido na fase de distribuição dos recursos acumulados. Este tipo de plano possui menor capacidade de gerar volatilidades no passivo.



Devido as modelagens distintas presentes em cada modalidade de plano, os resultados em Planos CD, BD e CV são diferentes. Planos CD puros não apresentam déficit ou superávit, dado que o benefício é baseado apenas na reserva matemática acumulada do participante. Os planos BD/CV apresentam déficit técnico, também chamado Passivo a Descoberto, quando o ativo líquido do plano é insuficiente para cobrir os compromissos líquidos (passivo atuarial do plano). O superávit técnico ocorre de forma oposta, o ativo líquido supera o valor do passivo atuarial, sendo a diferença entre eles o seu valor.

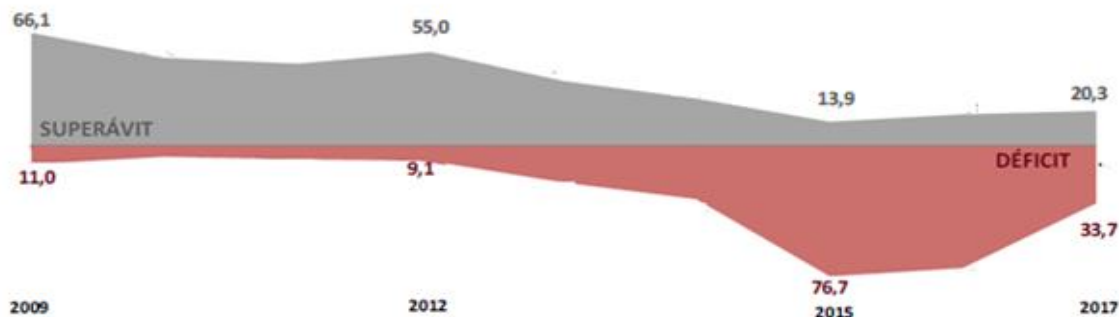
As Entidades Fechadas de Previdência Complementar deverão observar na estruturação, apuração de resultado, destinação e utilização de superávit e no equacionamento de déficit dos planos de benefícios de caráter previdenciário que administram, parâmetros técnico-atuariais, com fins específicos de assegurar transparência, solvência, liquidez e equilíbrio econômico, financeiro e atuarial. Estes parâmetros devem observados na Resolução CGPC N° 30 de outubro de 2018.

No que tange o equacionamento do déficit atuarial, o resultado apurado no plano de benefícios definido deverá ser equacionado por participantes, assistidos e patrocinadores, observada a proporção contributiva em relação às contribuições normais vigentes no período em que for apurado o resultado. A reserva matemática individual também deverá ser considerada para o equacionamento de déficit pelos participantes e assistidos como forma de ponderação. Uma consideração a ser feita é que a individualização do equacionamento do déficit não é inconsistente com aspectos de mutualismo e solidariedade. O mutualismo e a solidariedade continuam existindo na medida em que a responsabilidade pelo equacionamento ainda é dividida por todos. O plano de equacionamento poderá contemplar a instituição ou o aumento de contribuição extraordinária, redução de valor do benefício a conceder ou outras formas estipuladas no regulamento do plano de benefícios.

Analisando a situação dos planos de benefícios conforme a ABRAPP – Associação Brasileira de Entidades Fechadas de Previdência Privada (2017), o Brasil possui aproximadamente 630 Planos de Previdência Complementar Fechada concentrando um patrimônio na ordem de R\$ 805 bilhões de reais. Notável é a importância destes fundos de pensão na economia do país, gerando mais renda para, aproximadamente, 5 milhões de participantes, fomentando e desenvolvendo diversos setores da economia.

Constitui-se como grande desafio garantir a solvência das EFPC, principalmente para os Planos de Benefício Definido e Contribuição Variável, devido a exposição de maiores riscos em virtude da sua modelagem. Desta forma, investigar formas de equalizar riscos, tem uma importância fundamental para sustentabilidade das instituições diante do propósito de evitar os desvios, positivos ou negativos, com consequências mais graves de custos adicionais, financeiros e sociais, para seus participante¹. A Figura 1 evidencia de forma resumida a situação econômico-financeira dos Fundos de Pensão no Brasil.

Figura 1: Situação Econômico-Financeira dos Planos no Brasil entre 2009 e 2017 em bilhões



Fonte: Consolidado estatístico ABRAPP 2017

A figura 1 apresenta saldos superavitários e deficitários no período entre 2009 e 2017. Observa-se que, em 2009, o somatório dos superávits totalizou R\$ 66,1 bilhões, enquanto o somatório dos déficits importou em R\$ 11,0 bilhões. Em 2012 houve uma redução no montante superavitário de 16,79% e de 17,27% em relação ao montante deficitário.

Em 2015 os resultados negativos dos planos cresceram 742,85% em relação a 2012. De acordo com PREVIC (2016), tais resultados refletem contexto econômico adverso para os investimentos das EFPC, sobretudo aqueles realizados em renda variável e crédito privado, relacionados ao desempenho da economia brasileira e do mercado financeiro. Adicionalmente, os números foram impactados negativamente pela dinâmica inflacionária de curto prazo, que corrige reservas matemáticas e aumenta metas nominais de rentabilidade das carteiras, e pelo aumento de longevidade que induz inequivocamente o aumento dos compromissos dos planos com pagamento de benefícios.

Importante destacar também que a regra de solvência regulamentada pela Resolução CNPC nº 22/2015 estabeleceu parâmetros diferenciados para o equacionamento de déficits em função de características de cada plano de benefícios. Nesse contexto, os resultados negativos apurados em planos com mutualismo (modalidade BD e CV) devem ser relativizados e não implicarão, necessariamente, exigência de equacionamento imediato, a depender da maturidade dos fluxos de pagamento do passivo atuarial (duration).

Observa-se, pelo exposto, que o cenário da situação econômico-financeira das EFPC está em constante mudança afetando mais intensamente planos BD e CV, com nítido impacto no risco atuarial designado pelos seus diversos enquadramentos, a saber: risco de mercado, biométrico, de liquidez, operacional, de modelagem financeira, de método atuarial e de descasamento de outras premissas atuariais. O gerenciamento do risco atuarial tem como objetivo assegurar os padrões de segurança econômico-financeira, com fins específicos de preservar a liquidez, a solvência e o equilíbrio dos planos de benefícios administrados pelas EFPCs.

A busca pelo equilíbrio financeiro e atuarial é incessante uma vez que é tido como garantia dos Planos BD e CV honrarem com seus compromissos. Portanto, desvio nos resultados, especificamente, as perdas, considerados déficits, gera-se expectativa negativa dos participantes e patrocinadora. Porém uma vez ocorrido, é necessário que seja realizado a sua adequação e para tanto, um plano de equacionamento de déficit deverá ser elaborado. Este artigo tem a proposta de apresentar modelo para equacionar esses déficits utilizando metodologia de valor de Shapley ainda não aplicada na área no Brasil.



3 REFERENCIAL TEÓRICO

Winklevoss (1993) afirma que os custos de um plano podem ser caracterizados em custos normais e os custos suplementares. Os custos normais representam o custo anual atribuído ao ano corrente de serviço prestado pelos participantes ativos, sendo tal custo definido por métodos atuariais. Custos suplementares são projetados para resolver a diferença entre a acumulação teórica e a acumulação real dos custos normais. A discrepância que se desenvolve entre os ativos do plano e os o passivo atuarial determinado é chamado de responsabilidade não financiada. Embora o termo "passivo a descoberto" seja usado. Esta discrepância pode ser positiva ou negativa.

Teoricamente, o acúmulo de custos normais passados irão precisamente igualar ao passivo atuarial, ou seja, o valor presente dos benefícios futuros deve ser o mesmo que o valor presente dos custos normais futuros. Da mesma forma, se as contribuições são feitas para o fundo a cada ano, no valor do custo normal, então, os ativos planejados também serão iguais aos responsabilidade atuarial.

Há várias razões, no entanto, para que essas igualdades não sejam obtidas, entre elas as: variações de experiência, isto é, a experiência do plano será diferente das premissas atuariais subjacentes, referidas como ganhos e perdas atuariais; mudanças nas premissas; mudanças nos benefícios quando da alteração da metodologia de cálculo dos benefícios do plano; atribuições de serviços passados.

Rodrigues (2006) aborda que a ocorrência de déficit decorrentes de serviços passados não fundados ou de insuficiências financeiras sejam cobertos por algum método dissociado ou não do custo normal adotado para financiamento do plano.

Para Winklevoss (op.cit), os custos suplementares são projetados para amortizar o passivo a descoberto do plano. Nesse sentido, eles são como o custo normal do plano os quais são projetados para amortizar o valor presente dos benefícios futuros (VPBF) da idade y para a idade r , mas que pode deixar de ser realizado devido a ocorrência de algum fator como aumento de benefícios e mudanças dos parâmetros utilizados como premissas. A falta de amortização dos custos normais cria o passivo a descoberto que, por sua vez, gera um custo suplementar.

O custo suplementar pode ser um custo único igual em valor ao passivo não financiado criado durante um determinado ano, ou pode se estender por um período de anos. Podem, pelo menos em teoria, assumir qualquer padrão ao longo de qualquer período, ou estes custos podem ser orientados para o padrão de custo normal correspondente do método de custo atuarial em uso.

Em relação às causas referenciadas acima por Winklevoss (1993), o custo suplementar associado às variações de experiência e as mudanças de suposição são quase sempre formuladas em um grupo base, isto é, o passivo a descoberto é determinado no agregado para todos os membros do plano e amortizado posteriormente sem referência a participantes individuais ou com referência apenas para o grupo atual de participantes ativos. O passivo a descoberto e os custos suplementares associados com mudanças nos benefícios, particularmente os acréscimos de serviços passados, são com base individual ou grupal, dependendo do método de custo do plano atuarial sendo utilizado e/ou a preferência do patrocinador do plano ou atuário.

Rodrigues (2006) e Winklevoss (1993) abordam métodos capazes de reduzir, gradualmente, a insuficiência e direcionar o plano para o equilíbrio financeiro e atuarial. Entre os métodos referenciados estão os: Modelo de Custo Suplementar Explícito – o método para financiar o passivo a descoberto dissocia-se do método atuarial do custeio corrente do Plano. Utiliza apenas conceitos da matemática financeira (Método Price, Método Americano e Método Sinking Fund) e o Modelo de



Custo Suplementar Implícito – o método para financiar o déficit atuarial é o mesmo utilizado para o custeio corrente do Plano. Utiliza conceito de matemática financeira e processos atuariais (Benefício Acumulado e Benefício Projetado).

Este trabalho pretende fugir dos métodos convencionais adotados pela literatura que se resume basicamente ao emprego das metodologias relatadas por Rodrigues (op.cit) e Winklevoss (op.cit). Desta forma, a utilização de valor de Shapley é inovadora nesta área, uma vez que é bastante utilizada em estudos de alocação de custos em outras áreas do conhecimento. Entretanto, esse método, no ramo atuarial de fundos de pensão encontra-se em estágio inicial no Brasil. Espera-se que com o uso desse instrumento seja possível calcular o percentual ótimo que cada participante deveria contribuir para o custo suplementar, alcançando, desta forma, equilíbrio financeiro e atuarial do plano.

Cabe ressaltar que estudos que envolvem jogos cooperativos são mais aplicados a problemas atuariais em assuntos relacionados a área de seguro. Lemaire (1984) foi pioneiro, quando usou esta ferramenta no cálculo do prêmio e na alocação de custos em uma companhia de seguros. O autor desmistifica a utilização prática da teoria dos jogos com aplicações eficazes para solução de problemas de alocação de custos.

Alegre e Claramunt (1995) estenderam a ideia dos jogos à alocação do custo de solvência em anuidades de grupo comparando dois métodos de alocação: o primeiro baseado em princípios atuariais; e o segundo baseado na teoria dos jogos cooperativos. Os autores apresentam as possíveis coalizões que poderiam ser formadas de modo que os indivíduos possam economizar no prêmio se decidirem optar por um seguro coletivo em vez de um seguro individual. Outros estudos (DENAULT, 2001; TSANAKAS e BARNETT, 2003; YANG, 2014) utilizaram teoria dos jogos aplicados às ciências atuariais, mais especificamente, na área de seguros e solvência.

4 MODELO

A Teoria dos Jogos teve seu desenvolvimento formal a partir da segunda metade do século XX e vem ganhando importância cada vez maior. Novas abordagens têm possibilitado sua aplicação não somente no campo da economia, mas também em diversas outras áreas, como Engenharia, Saúde e Ciências Políticas.

Pode-se dividir a teoria dos jogos em duas categorias: a teoria dos jogos não cooperativos, onde de forma simplista e genérica, não é possível combinar estratégias ou fazer acordos entre agentes; e a teoria dos jogos cooperativos, onde fica caracterizado que os acordos entre os agentes é a base para a cooperação.

A teoria dos jogos cooperativos busca apresentar os possíveis resultados quando ocorre a cooperação entre os participantes no jogo, quais os tipos e números de coalizões que poderão ser formadas e de que forma ocorrerá a repartição dos ganhos com a cooperação concretizada de forma que, com a existência da cooperação, os jogadores tenham incentivos a cooperarem. Os conceitos de soluções dos jogos cooperativos estão associados a conceitos subjetivos de equidade e justiça, explorados em Young (1994).

Myerson (1991) explica que a possibilidade efetiva de existência de negociações entre coalizões de jogadores é a hipótese crucial que distingue jogos cooperativos dos não cooperativos. Afirmar que os integrantes de uma coalizão podem efetivamente negociar, significa dizer que se houvesse uma mudança factível nas estratégias dos seus membros que beneficiasse a todos, então eles concordariam em realizá-la. Nos jogos cooperativos os jogadores podem conversar entre si para chegarem a um acordo e, o que é mais importante, esses acordos são respeitados.



Um dos conceitos de solução mais difundidos dos jogos cooperativos é o valor de Shapley, que segundo Roth (1988) é um conceito de solução que resume as reivindicações conflitantes que cada jogador enfrenta em um jogo cooperativo por meio de um único número que representa exatamente o valor de jogar o *game* em uma situação de cooperação. Por se basear em axiomas relativamente simples e ser um conceito de solução de fácil entendimento e computação em comparação a outras soluções cooperativas, o valor de Shapley vem sendo aplicado em ampla variedade de contextos econômicos envolvendo problemas de alocação. Este tipo de problema consiste em dividir custos comuns de uma dada atividade, função ou processo entre seus usuários de acordo com as responsabilidades ou benefícios recebidos, conforme aborda Young (*op.cit*).

Como este trabalho consiste em dividir o custo de um passivo a descoberto por um grupo de participantes do Plano BD, na qual sua característica fundamental está no caráter de mutualismo e solidariedade, devendo, portanto, que todos sejam responsáveis por contribuir por este custo, a solução de Shapley se enquadra perfeitamente no contexto elucidado por Roth (*op.cit*).

4.1 Aplicação Do Modelo

A representação do jogo cooperativo é dada através da função característica, que é a forma pela qual se indica o valor de cada coalizão e se descrevem as possibilidades de cooperação. Para Mas-Colell et al. (1995) a função característica apresenta uma descrição dos *payoffs* disponíveis para diferentes grupos de jogadores em um contexto onde acordos de compromisso entre eles são viáveis, o que é exatamente a essência da cooperação.

Seja $N = \{1, \dots, n\}$ um conjunto finito que representa o universo de jogadores, conhecido como grande coalizão. Cada jogador será representado por um participante do Plano BD. Cada subconjunto finito e não vazio de N é chamado de coalizão (S).

Para cada coalizão S , especifica-se um conjunto $v(S) \subset \mathbb{R}^s$ contendo vetores de *payoff* de dimensão s , que são viáveis para a coalizão S . Tem-se que v é exatamente a função característica que designa um número real $v(S)$ para cada coalizão S , com $v(N)$ indicando o valor da grande coalizão e $v(\emptyset) = 0$. Um jogo cooperativo pode ser representado de forma resumida por (N, v) onde N é o conjunto de jogadores e v é a função característica que associa um número real $v(S)$ com cada subconjunto S de N .

Shapley (1953), então, define o valor $\phi(v)$ do jogo v como sendo uma função que associa com cada jogador i em N , uma alocação de *payoff* representada por um número real $\phi_i(v)$ que deve atender as condições de quatro axiomas:

A_1 : Eficiência. $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$. O ganho total deve ser totalmente repartido entre os participantes, isto é a soma das alocações de *payoffs* de todos os jogadores deve igualar $v(N)$, o valor total do jogo.

A_2 : Simetria. Se houver um reordenamento de i no jogo, seu valor $\phi_i(v)$ não se altera, pois, o que implica na determinação do valor é como a função característica responde à presença de um jogador em uma coalizão. O axioma da simetria garante que jogadores tratados de forma idêntica pela função característica têm o mesmo valor.

A_3 : Aditividade. Para quaisquer jogos v e ω , $\phi_i(v + \omega) = \phi_i(v) + \phi_i(\omega)$ para todo i em N , em que o jogo $[v + \omega]$ é definido por $[v + \omega](S) = v(S) + \omega(S)$ para qualquer coalizão S . O axioma da aditividade diz que a solução para a soma de dois jogos deve ser igual à soma do que é recebido separadamente em cada um deles.



A4: Jogador *dummy*. Um jogador *dummy* não contribui com nada adicional a uma coalizão (além do seu próprio valor), a solução então lhe reservará apenas seu valor individual $v(i)$. Isto é, $v(S) - v(S - i) = v(i)$ para cada coalizão S que i não faz parte, de modo que $\phi_i(v) = v(i)$.

Shapley (1953) demonstrou matematicamente que há um método de solução de valor único para jogos cooperativos satisfazendo esses quatro axiomas. É o que ficou conhecido como valor de Shapley, a função característica que designa para cada jogador i o *payoff*

$$\phi_i = \sum_{s \in N} [v(S) - v(S - i)] \cdot \frac{(|S|-1)! \cdot (n-|S|)!}{n!} \quad (1)$$

De acordo com o autor não é necessária nenhuma condição adicional, além desses axiomas, para determinar o valor de forma única.

Considerando a ideia da entrada aleatória de um jogador, o valor de Shapley $\phi_i(v)$ de um jogador pode ser interpretado como sendo a contribuição marginal esperada a cada coalizão que ele puder se associar. Desta forma, a contribuição marginal de i ao formar qualquer coalizão S é dada por $v(S) - v(S - i)$, ou seja, é quanto ele acrescenta ao se unir a outros jogadores.

Conforme Hart (1989), se a expectativa é que um indivíduo acrescente pouco/muito às coalizões, então o *payoff* alocado a ele tende a ser pequeno/grande. Nesse sentido, o valor de Shapley é considerado um princípio que procura dividir um excedente de forma justa entre os jogadores, em que o conceito de justiça não é o de equidade, mas a ideia de que o *payoff* que o indivíduo recebe é determinado por sua contribuição, ideal exposto por Young (1944).

Para aplicar o modelo de valor de Shapley no equacionamento do déficit se faz necessário algumas definições. O cálculo do valor do passivo a descoberto de um modo geral pode ser dado por:

$$RMD_t = RM_t - AL_t \quad (2)$$

Em que RMD_t é a reserva matemática a descoberto, RM_t é a reserva matemática e AL_t é o ativo líquido, todos na época t .

Considerações do modelo sugerido da estrutura dos jogos cooperativos, o modelo define:

- T será o custo total mensurado através do valor do déficit atuarial (RMD_t);
- μ_i será o valor máximo de contribuição do participante. Terá como referência 30% do salário;
- R_i considerada a riqueza do participante. A riqueza será auferida pelo salário;
- Z_i valor a ser contribuído pelo participante;
- $\mu_i - Z_i$ será o excedente do participante i , calculado através do valor de Shapley ϕ_i .

Hipóteses do Modelo:

- I) $\sum R_i > T$
- II) $\sum \mu_i > T$
- III) $\sum Z_i = T$

Com isso, pretende-se definir o valor do modelo como:



$$v(S) = \begin{cases} \max(\sum \mu_i - T), & \text{se } \sum R_i > T \\ 0, & \text{se } \sum R_i < T \end{cases} \quad (3)$$

Para melhor entendimento do modelo, será realizado caso hipotético com três participantes com características de remunerações distintas. Foram considerados três participantes para demonstração devido ao baixo grau de complexidade do *modus operandi*. Considerando o déficit atuarial auferido de sete unidades monetárias, os participantes com sua riqueza (R_i) e contribuição máxima (μ_i) que cada um poderá dispor para o custo suplementar.

$$R_1 = 5; \quad \mu_1 = 1,5$$

$$R_2 = 10; \quad \mu_2 = 3$$

$$R_3 = 15; \quad \mu_3 = 4,5$$

Calculando o valor das coalizações $v(s)$ temos:

$$v(1) = 0; v(2) = 0; v(3) = 0$$

$$v(12) = 0; v(13) = 0; v(23) = 0,5$$

$$v(123) = 2$$

Aplicando a fórmula de Shapley temos que:

$$\phi_1 = [v(1) - v(0)] * \frac{(1-1)! * (3-1)!}{3!} + [v(12) - v(2)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(13) - v(3)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(123) - v(12)] * \frac{(3-1)! * (3-3)!}{3!} = \frac{1,5}{3}$$

$$\phi_2 = [v(2) - v(0)] * \frac{(1-1)! * (3-1)!}{3!} + [v(21) - v(1)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(23) - v(3)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(123) - v(13)] * \frac{(3-1)! * (3-3)!}{3!} = \frac{4,5}{6}$$

$$\phi_3 = [v(3) - v(0)] * \frac{(1-1)! * (3-1)!}{3!} + [v(31) - v(1)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(32) - v(2)] * \frac{(2-1)! * (3-2)!}{3!} + [v(123) - v(12)] * \frac{(3-1)! * (3-3)!}{3!} = \frac{4,5}{6}$$

Sabendo que, $\phi_i = \mu_i - Z_i$, tem-se que o valor a ser contribuído por cada participante para o custo suplementar é:

$$Z_1 = 1,0; Z_2 = 2,25; Z_3 = 3,75, \text{ totalizando o custo do passivo a descoberto.}$$

Aplicando a metodologia tradicional de equacionamento do passivo a descoberto as contribuições para custo suplementar calculados por esta metodologia serão dadas por Z_i^* a saber:

$$Z_1^* = 1,1667; Z_2^* = 2,3334; Z_3^* = 3,5001$$



Estes valores foram determinados considerando a restrição do valor máximo de contribuição, 30% da riqueza do participante, o valor obtido a partir de $\sum R_i \mu_i = 9$ unidades monetárias, implicaria em uma necessidade de aplicação de um percentual de 77,78% para anular o déficit atuarial.

Comparando os dois modelos, observa-se que os participantes 1 e 2 tiveram suas contribuições menores nos jogos cooperativos, porém para o participante 3 o modelo tradicional mostra-se mais vantajoso quando comparado com o modelo de valor de Shapley. Uma das respostas para esta ocorrência é que o salário do participante possui grande “impacto” na coalização, induzindo maior contribuição referente ao seu custo suplementar. Resultado é coerente com o que Hart (1989) expôs, visto que a expectativa é que o *payoff* alocado para o indivíduo seja atrelado a dimensão da sua contribuição.

Uma outra consideração é quanto ao baixo número de jogadores e a discrepância de salários de participação relativamente alta. O jogador 3 possui maior riqueza e consequente maior salário de participação em relação aos demais jogadores, possuindo maior contribuição marginal. Caso o número de participantes fosse relativamente maior, os resultados do modelo de Shapley poderiam ser mais eficientes que os calculados com método tradicionalista, de maneira que, os participantes tenham incentivos a cooperarem.

5 CONCLUSÃO

A teoria dos jogos cooperativos representa uma poderosa ferramenta matemática de modelagem e solução de problemas de distribuição de custos, lucros, e/ou recursos em situações de cooperação. Considera diferentes relações entre jogadores e também trabalha com definições maleáveis de “justiça”, podendo se adequar a diversas situações de cooperação, o que representa um diferencial em relação às outras metodologias.

A aplicação desta teoria no campo de atuarias no Brasil possui potencial para se expandir. Não foi encontrado em periódicos acerca desta metodologia de valor de Shapley para equacionamento de passivo a descoberto. O modelo proposto tem arcabouço teórico e prático para se expandir, daí a importância de mais pesquisadores trabalhando em comum-unidade, aplicando os conceitos, e desenvolvendo técnicas.

Usando jogos cooperativos, foi proposto um estudo de caso com 3 participantes, no qual foi estabelecido o valor máximo de cada participantes (μ_i), valor a ser contribuído de fato pelos participantes (z_i) e o excedente do participante (ϕ_i). Aplicando a metodologia proposta observou-se que o novo arranjo beneficiou 2 participantes, penalizando o 3, fato este que uma necessidade de aumento na contribuição da ordem de 77% para equilíbrio do déficit.

Observa-se que os valores encontrados para fins de contribuição suplementar, através dos jogos cooperativos, é um resultado ótimo para o fundo de pensão, uma vez que os custos foram reduzidos quando formada as coalizões. Os resultados encontrados vão ao encontro ao proposto pelo valor de Shapley, fornecendo critério econômico para a alocação de custos decorrentes de ações cooperativas.

O foco deste trabalho foi o déficit atuarial dos planos de benefícios definidos, porém este modelo se enquadra também na distribuição de superávit. Como sugestão de trabalhos futuros, a utilização de base de dados real de fundo de pensão com as características necessárias, análise de quais participantes torna-se mais oneroso a participação do modelo de jogos cooperativos.



REFERÊNCIAS

ALEGRE, A. e CLARAMUNT, M. M.. **Allocation of solvency cost in group annuities: Actuarial principles and cooperative game theory**. Insurance: Mathematics and Economics, 17:19-34, 1995.

CLARK, R. L., BURKHAUSER R. V., MOON, M., QUINN, H. F., SMEEDING, T. M. The economics of an aging society. Malden, Mass.: Blackwell, 2004. 362p.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil, 1988**. Brasília: Senado Federal, Centro Gráfico, 1988.

BRASIL. Lei Complementar nº 109, de 29 de maio de 2001. Dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF.

BRASIL. Resolução CGPC Nº 30, de 10 de outubro de 2018. Dispõe sobre as condições e os procedimentos a serem observados pelas entidades fechadas de previdência complementar [...], Diário Oficial da União, Brasília, DF.

CONSOLIDADO ESTATÍSTICOS ABRAPP, dezembro 2017, *sítio*:
http://www.abrapp.org.br/Consolidados/Consolidado%20Estat%C3%ADstico_12_2017.pdf

GARCIA, J.A., SIMÕES, O. A. **Matemática Actuarial: Vida e Pensões**, 2º Edição, Editora Almeida, 2010.

HART, O. **An Economist's Perspective on the Theory of the Firm**. In Organization Theory, O.E. Williamson, ed. New York: Oxford University Press, 154-71, 1990.

LEMAIRE, J. **An application of game theory: Cost allocation**. Astin Bulletin, 14(1): 61-81, 1984

LIMA, Jorge Cláudio Cavalcante de Oliveira; RODRIGUES, José Angelo. **Amortização de déficits atuariais em planos de benefícios definidos**. Revista do BNDES, Rio de Janeiro, n. 41, p. 209-256, jun. 2014

MAS-COLELL, A, Whinston, M.D. e GREEN, J.R. **Microeconomic Theory**, Oxford University Press, 1995.

MYERSON, R. B. **Game Theory: Analysis of Conflict**. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1995.

MCGILL, D.M., BROWN, K.N., HALEY, J.J., e SCHIEBER, S.J. **Fundamentals of Private Pensions**. Seventh Edition. Philadelphia: University of Pennsylvania Press for The Pension Research Council, 1996.



RODRIGUES, J. A. **Modelos de Amortização de déficits atuariais em fundos de pensão.** In: revista de Contabilidade Financeira da Universidade de São Paulo, Edição Especial Atuária, 2006.

ROTH, A. E. **The Shupley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shupley.** New York: Cambridge Univ. Press, 1988.

SHAPLEY, L.S. **A Value for n -person Games,** Annals of Mathematics Study N° 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 307–317, 1953.

PINHEIRO, R. P. **A demografia dos fundos de pensão.** Brasília: MPS. Coleção Previdência Social, Série Estudos, v. 24, 2007.

WINKLEVOSS, H. E. **Pension Mathematics with Numerical Illustration,** 2° edição, Pension research Council of the Wharton School of the University of Pennsylvania and University of Pennsylvania Press, PA, 1993.

YOUNG, H. P. **Cost Allocation.** in Handbook of Game Theory with Economic Applications, v. 2, eds, Aumann and S. Hart, North Holland, Elsevier, Amsterdam, 1994.