# Formation mathématique des enseignants du secondaire:
# Partie 1
# Réflexions fondées sur une analyse des recherches

Jérôme Proulx et Nadine Bednarz*, Université du Québec à Montréal*

**Résumé** : Nous proposons dans ce texte une réflexion et une discussion sur la formation mathématique des futurs enseignants au secondaire. Cette préparation mathématique semble souvent considérée comme un allant de soi. Celle-ci nous apparaît toutefois centrale à *re-penser* à la lumière des travaux de recherche récents dans le domaine : À quelles expériences et pratiques mathématiques devraient être confrontés les futurs enseignants du secondaire pour pouvoir enseigner les mathématiques ? La tentative de réponse que nous apportons à cette question est basée sur une analyse des travaux de recherche portant sur la formation des enseignants en mathématiques en regard de ses incidences possibles sur la pratique des futurs enseignants, ainsi que sur les recherches portant sur les connaissances mathématiques des enseignants. Ces travaux viennent fortement questionner la nature des expériences et pratiques mathématiques auxquelles ces enseignants sont habituellement confrontés dans leur formation.

**Mots clés** : formation mathématique des enseignants; enseignants du secondaire; connaissances mathématiques des enseignants; mathématiques académiques ; mathématiques de la pratique de l'enseignant.

> What greater challenge can we face professionally than to engage in a reflective analysis of our own programmes, much as we would like our teachers to challenge their programmes? (Cooney, 2001, p. 465)

## 1. Introduction

Les questions liées à la formation mathématique des enseignants ont pris récemment une place de plus en plus grande dans la communauté internationale. Cette formation mathématique est en effet au centre des préoccupations de plusieurs chercheurs et formateurs en formation des maîtres à travers le monde, qui sont amenés à interroger les programmes mis en place, à re-penser et théoriser les orientations potentielles de cette formation. Ces discussions, débats, ayant trait à la formation mathématique des enseignants ne datent toutefois pas d'aujourd'hui. Nous les retrouvons en effet dans les tous premiers documents officiels, ainsi que dans les actes, de la 3ème conférence internationale en éducation mathématique/International Conference on Mathematics Education (CIEM/ICME-3) tenue à

Karlsruhe (Allemagne), plus particulièrement dans le groupe de travail portant sur la formation des enseignants (voir Otte, 1976). L'extrait qui suit, qui réfère à des échanges ayant eu lieu il y a plus de trente ans, résume bien l'essence des propos de ce groupe de travail, dont la teneur pourrait facilement se retrouver au cœur des discussions actuelles :

> The question of what mathematical training a future mathematics teacher should receive produced divergent views. There were those who advocated 'mathematics for teachers' with emphasis on those aspects of mathematics which featured in school courses; others pointed to the position of mathematics teachers as members of the mathematical community and felt that two different types of mathematics do not exist. This is likely to remain an unresolved question, but one that required continuous examination. (pp. 200-201)

Toutefois, même si cette question a toujours été au centre des échanges des chercheurs et formateurs, ce qui a souvent manqué dans les discussions ayant cours autour de cette problématique de la préparation mathématique des enseignants – et particulièrement, en ce qui nous concerne ici, de celle des enseignants du secondaire – est la présence de recherches qui puissent étoffer et appuyer les différentes propositions et perspectives avancées, de telle sorte que l'on puisse aller de l'avant sur un examen approfondi de ces différentes pistes en documentant leur potentiel et leurs limites. Or, si nous voulons véritablement avancer sur cette question de la formation *mathématique* des enseignants du secondaire, un travail préalable s'impose qui puisse permettre de fonder, sur des bases solides, des orientations et des expériences à faire vivre aux futurs enseignants. Un tel travail d'analyse préalable, enraciné dans des travaux scientifiques, permettrait alors d'éclairer les questions au cœur de cette problématique. Rappelons ici quelques-unes de ces questions : Quelles expériences et pratiques mathématiques peuvent apparaître porteuses pour les futurs enseignants du secondaire pour pouvoir enseigner les mathématiques ? Quels en sont les fondements (quelles sont les raisons d'être de ces choix)? En particulier, comment ces expériences viennent-elles éclairer/enrichir la pratique professionnelle du futur enseignant de mathématiques? Quel potentiel présentent, en retour, de telles expériences pour le développement des pratiques professionnelles en enseignement des mathématiques au secondaire?

C'est sur ce travail d'analyse préalable que se penche cet article, dans le but d'éclairer par la recherche cette problématique de la préparation mathématique des enseignants du secondaire. Nos réflexions (dans la 1ère partie de cet article) visent avant tout à mieux comprendre quelques uns des enjeux de cette formation, en l'enracinant dans les recherches empiriques et écrits théoriques que notre champ de recherche a produit au fil des ans. Ces réflexions nous amèneront (dans la 2ème partie de cet article) à considérer plus précisément deux thèmes, parmi un ensemble de possibles, qui ressortent de cette analyse comme des éléments centraux à considérer pour la formation mathématique des enseignants du secondaire[1].

## 2. Un modèle usuel de formation mathématique des futurs enseignants du secondaire interrogé: limites mises en évidence par les recherches

Au Canada, comme dans bien d'autres pays à travers le monde, les enseignants du secondaire doivent suivre un nombre important de cours avancés en mathématiques pour obtenir le droit d'enseigner cette discipline dans les écoles secondaires (voir notamment Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Smida, Rouan, Ould Sidaty et Abdelli, 2007 ; Even et Ball, 2008). L'analyse du contexte actuel nous montre par ailleurs que ce contenu disciplinaire, en tant que composante fondamentale des programmes de formation des enseignants, est souvent

[1] Cette réflexion prend son ancrage dans un contexte particulier de formation des enseignants, très différent de celui d'autres pays. Au Québec (Canada), la formation des enseignants est une formation professionnelle qui se veut intégrée, de telle sorte que les composantes disciplinaires (mathématiques), didactiques, pédagogiques et pratiques prennent place simultanément à chacune des années de formation. Dans plusieurs autres pays, elle est d'abord une formation disciplinaire suivie d'une formation à l'enseignement [voir Bednarz et Perrin-Glorian, 2003; Kahane, 2003; 15ème étude ICMI (Even et Ball, 2008)]. Ce positionnement de la formation disciplinaire comme composante préalable versus intégrée aux autres dimensions a sans doute une influence sur les manières de voir les questions soulevées dans cet article, même si nous croyons nos propos assez larges pour initier une réflexion d'ordre plus général.

associé aux mathématiques que nous nommerons, reprenant ici le terme utilisé par Moreira et David (2005, 2007, 2008), les mathématiques « académiques »[2]. La formation mathématique des enseignants prend ainsi la forme de cours de mathématiques avancées, le plus souvent donnés par des mathématiciens, s'adressant aux étudiants en mathématiques (algèbre, algèbre linéaire, calcul différentiel et intégral, analyse, théorie des groupes, etc.).

À travers les années, cette orientation donnée à la préparation mathématique des futurs enseignants, telle qu'elle est actuellement conçue actuellement, a été interrogée (implicitement ou explicitement), en regard notamment du fossé entre l'expérience mathématique que vit le futur enseignant dans ces cours de mathématiques académiques et les expériences mathématiques auquel il sera confronté dans sa pratique scolaire (Bloch, 1997 ; Kahane, 2003 ; Moreira et David, 2007, 2008)[3]. Nous examinons ici les critiques adressées à cette formation disciplinaire initiale, en les regroupant autour de deux axes : un questionnement, d'une part, de la relation souvent établie entre le niveau de formation en mathématiques des enseignants et la performance des élèves et, d'autre part, une analyse des incidences potentielles de cette formation et des expériences que vivent les enseignants sur leurs façons de connaître et de pratiquer les mathématiques.

[2] Nous reviendrons sur cette conceptualisation par la suite. Les écrits portant sur les mathématiques de niveau universitaire utilisent aussi le terme « mathématiques avancées ».

[3] Ce qui n'est pas sans rappeler ce que Felix Klein (1932, p.1) appelait la « double discontinuité » vécue par les enseignants lors de leur passage de l'école secondaire à l'université, puis de l'université à l'enseignement dans les écoles. Une telle discontinuité est bien mise en évidence dans le rapport de la Commission Kahane sur la formation des enseignants. Ce dernier pointe « un certain nombre de différences entre les pratiques mathématiques des étudiants (dans les cours universitaires) et celles des enseignants, qui peuvent engendrer des difficultés à l'installation dans la profession » (2003, p. 60). Par exemple, la planification d'un cours complet sur une notion, au sein d'une progression cohérente sur l'année, le choix de tâches, de problèmes, l'animation mathématique collective de séances en classe, met en jeu un ensemble d'activités de la part de l'enseignant, à la source de questionnements mathématiques, non prises en compte dans la formation mathématique académique.

### *2.1. Une relation interrogée entre le niveau de formation des enseignants en mathématiques (avancées) et la performance des élèves en mathématiques*

Dans la foulée des recommandations visant à favoriser une plus grande réussite des élèves en mathématiques, plusieurs intervenants insistent pour que les enseignants en sachent davantage et soient plus « formés » en mathématiques, recommandant dans ce cas qu'ils aient davantage de cours universitaires en mathématiques. Toutefois, il existe peu d'évidence dans les données issues des travaux de recherche qui puissent permettre d'établir un lien entre les connaissances des enseignants, plus spécifiquement le nombre de cours universitaires en mathématiques pris par ces derniers, et la performance des élèves en mathématiques (Begle, 1979; Monk, 1994).

Ainsi dans sa revue exhaustive de la littérature scientifique de l'époque, Begle (1979, p. 51) insistait sur le fait qu'il fallait revoir la croyance populaire très répandue affirmant que plus un enseignant connaît de mathématiques (en termes de nombre de cours universitaires suivis[4]), plus il est un enseignant efficace. En effet, à travers sa revue de littérature, Begle a été incapable de montrer la présence d'une corrélation positive entre le nombre de crédits universitaires suivis par les enseignants et les réussites de leurs élèves. (Begle fait même ressortir la présence, dans certains cas, d'une corrélation négative entre le nombre de cours universitaires en mathématiques suivis par les enseignants et la performance des élèves.) Fait intéressant, 15 ans plus tard, Monk (1994) arrive à des résultats similaires. Ce dernier a en effet montré dans son étude que l'amélioration des résultats des élèves augmente de façon très minime, voire insignifiante, jusqu'au cinquième cours universitaire suivi en mathématiques par les enseignants et qu'après le cinquième cours l'influence est pratiquement nulle. Ainsi, comme le soulignent ces résultats de recherche, le lien entre connaissances mathématiques universitaires des enseignants et performance des élèves semble difficilement tenir la route,

[4] Ce qui peut évidemment être une mesure discutable.

amenant à reconsidérer cette croyance commune encore répandue, et la nécessité de mieux prendre en compte les interactions complexes à la base des apprentissages des élèves.

Plusieurs études internationales centrées sur l'analyse de vidéos de pratiques de classe en mathématiques dans différents pays montrent à cet effet que la question de l'apprentissage mathématique des élèves est une question complexe qui ne peut être réduite à un lien direct avec le niveau de formation mathématique des enseignants (Clarke, Keitel et Shimizu, 2007)[5]. Les recherches menées au cours des vingt dernières années sur l'analyse des pratiques d'enseignement montrent bien le jeu des contraintes et marges de manœuvre au cœur de ces pratiques et la richesse des connaissances mises en action par l'enseignant (Hache, 1999, 2001 ; Hersant, 2004 ; Margolinas, Coulanges et Bessot, 2005 ; Ngono, 2003 ; Robert, 2001 ; Roditi, 2005). Elles pointent en fait la difficulté que pose, entre autres au plan méthodologique, l'analyse de la relation entre cette pratique et les apprentissages mathématiques qui s'y construisent chez les élèves (Oliveira, 2008) – dimension encore très peu étudiée par la recherche.

Ces différentes recherches montrent ainsi la nécessité de dépasser cette simple mise en relation entre connaissances mathématiques (avancées) des enseignants et résultats des élèves en mathématiques, pour appuyer la pertinence d'une telle formation en mathématiques. Elle nous amène, pour aller plus loin, à interroger le contenu même de cette formation, ce qui s'y fait, les expériences qui y sont vécues par les futurs enseignants, pour entrer sur son apport

[5] Les 12 recherches reprises dans ce livre proviennent d'équipes universitaires en Australie, Chine, République Tchèque, Allemagne, Israël, Japon, Corée, Philippines, Singapour, Afrique du Sud, Suède et États-Unis. La perspective adoptée en est une de documentation en profondeur dégageant les significations données à des pratiques de classe de mathématiques (dans ce cas de 8ème année) du point de vue des élèves, de l'enseignant et des chercheurs (ce que les élèves y ont vu, analyse des pratiques dans lesquelles l'élève choisit de participer ou de ne pas participer, significations que l'élève et l'enseignant dégagent comme étant associées à ces pratiques, etc.) : « This project adopted the position that research into classrooms, and into learning in classrooms, in particular, must address the interactive and mutually dependent character of teaching and learning. Such an approach requires the simultaneous documentation of the practices of both teacher and learners and the identification of the meanings each constructs for (and from) the practices of the other » (Clarke, Keitel et Shimizu, 2007, p. 6).

possible dans une formation à l'enseignement – ce que nous regardons dans la prochaine section.

### *2.2. Incidences possibles des expériences mathématiques « académiques » en lien avec les futures pratiques professionnelles des enseignants du secondaire : un éclairage amené par les recherches*

Plusieurs travaux s'interrogent sur l'apport de la formation en mathématiques avancées, telle qu'elle est souvent conçue/pensée dans les programmes de formation. Les éléments repris par les chercheurs insistent sur la présence possible d'incidences de cette formation sur les pratiques futures de ces enseignants et sur les compréhensions mathématiques qu'ils y développent. C'est le cas entres autres de Bauersfeld (1994), qui, à travers une analyse des cultures mathématiques académiques et scolaires, met en évidence que les modèles de formation des enseignants surestiment souvent les effets positifs d'une formation académique en mathématiques. Cette formation mathématique fait en effet implicitement (dans les choix retenus, les manières d'approcher les contenus, ce qui y est attendu et valorisé, etc.) la promotion de valeurs, de manières de faire, de conceptions et façons de penser propres aux mathématiques académiques, et qui ne sont pas nécessairement appropriées pour, ou en lien, avec les pratiques d'enseignement des mathématiques de l'enseignant du secondaire (voir aussi à ce sujet l'analyse de Luk, 2005, pour une discussion de cette rupture entre la culture des mathématiques académiques et celle des mathématiques scolaires – résumée à la note de bas de page 10). En un mot, les enseignants de mathématiques du secondaire sont intégrés dans une culture mathématique assez différente de celle qu'exige leur future pratique professionnelle en enseignement des mathématiques. Ces expériences mathématiques vécues par les futurs enseignants dans plusieurs cours de mathématiques académiques, comme nous le rappelle Bauersfeld (1994), peut ainsi avoir des implications indirectes significatives (à travers les habitus qu'y développent les futurs enseignants) pour le développement de manières de connaître et de pratiquer les mathématiques.

Pour mieux comprendre les incidences possibles de cette formation, nous précisons dans ce qui suit la nature de ce fossé entre les expériences mathématiques vécues de part et d'autre[6].

*2.2.1. Forme des contenus travaillés dans les cours de mathématiques académiques et dans les pratiques d'enseignement.*

Plusieurs chercheurs ont souligné le fait que la nature formelle des mathématiques travaillées à l'intérieur des cours de mathématiques académiques pourrait avoir une certaine incidence sur la pratique de l'enseignant, en renforçant le côté abstrait et formel de leurs compréhensions mathématiques des concepts ainsi que dans leurs pratiques d'enseignement – et où des difficultés importantes à concevoir et à approcher l'enseignement de concepts mathématiques de manière à les rendre accessibles et compréhensibles par les élèves peuvent apparaître (Ball, Lubienski et Mewborn, 2001; Cooney et Wiegel, 2003; Gattuso, 2000 ; NRC, 2001).

L'étude de cas conduite par Thompson et Thompson (1994, 1996) est une illustration éloquente de ces difficultés. L'enseignant (nommé Bill) suivi dans cette recherche témoigne d'une compréhension avancée et formelle du taux de variation et de la vitesse. Toutefois cette

[6] Plusieurs recherches en didactique des mathématiques se sont évidemment intéressées à l'enseignement/apprentissage des mathématiques au niveau supérieur et ont ainsi contribué à éclairer les difficultés que rencontrent les étudiants, en plus d'élaborer diverses interventions didactiques porteuses pour promouvoir des conceptualisations mathématiques plus riches chez eux (voir, entre autres, Corriveau et Tanguay, 2007 ; Dorier et al., 1997 ; Tall, 1991, 2001 ; Rasmussen, Zandieh, King et Teppo, 2005). Notre propos n'est toutefois pas de revenir sur l'apport de ces travaux pour les questions d'enseignement des mathématiques au niveau supérieur, mais bien de souligner les questions nouvelles, non traitées dans ces recherches, que pose l'articulation de cet ensemble d'expériences au niveau universitaire (préparation mathématique du futur enseignant) avec les exigences et expériences de la pratique professionnelle du futur enseignant en mathématiques.

compréhension est tellement intégrée à des calculs et des opérations que ceci le rend incapable d'articuler clairement pour son élève le raisonnement qu'il utilise. Sa compréhension formelle du concept de taux de variation fait *pour lui* ressortir clairement le sens et les liens possibles, mais laisse ces derniers opaques pour son élève, de sorte que son explication crée même une rupture entre eux où ils n'arrivent pas du tout à se faire comprendre l'un et l'autre. Une autre étude qui illustre ces difficultés rencontrées par les enseignants vient de Nathan et Koedinger (2000). Dans cette étude, les chercheurs ont distribué des questionnaires à des enseignants leur demandant de classer une liste de problèmes algébriques en prédisant leur degré de difficulté pour les élèves. Ils ont alors trouvé un degré de corrélation très bas entre les difficultés réelles rencontrées par les élèves dans ces problèmes et les prédictions des enseignants. Entres autres, les enseignants avaient surestimé la facilité que les élèves éprouveraient avec la résolution de ces problèmes en ce qui a trait aux aspects de formalisme et de manipulations symboliques. Les chercheurs ont alors émis l'hypothèse (tout comme le fera par la suite le NRC, 2001, discutant de cette étude) que la facilité que ces enseignants rencontraient avec ces manipulations symboliques les avait probablement amenés à sous-estimer les difficultés que les élèves éprouveraient avec ces mêmes formes symboliques. Ces études tendent ainsi à montrer que la formation mathématique des enseignants dans les cours de mathématiques avancées n'est pas sans incidence sur la manière de concevoir et d'approcher l'enseignement d'un certain contenu mathématique et de penser et d'organiser les explications pour les rendre compréhensibles aux élèves ; la facilité que les futurs enseignants ont à jouer avec les mathématiques abstraites et formelles, les habitus développés dans les expériences vécues dans leur formation mathématique (académique), devenant en ce sens un obstacle à leurs pratiques futures (voir le NRC, *ibid.*, chap. 10)[7].

[7] Nous avons nous même montré dans nos recherches en didactique de l'algèbre la difficulté que les futurs enseignants avaient à entrer dans la compréhension d'un raisonnement arithmétique possible pour aborder ces

Une deuxième dimension, témoignant du fossé qui sépare les expériences mathématiques vécues par les enseignants dans les cours académiques et leurs pratiques mathématiques futures, a trait à la nature même des concepts travaillés dans les deux cas.

### *2.2.2. Nature des concepts travaillés dans les cours de mathématiques académiques et les pratiques d'enseignement*

Au delà des incidences possibles de l'aspect formel des mathématiques académiques, la nature même des concepts travaillés dans ces cours peut sembler en rupture avec ce que les enseignants doivent développer dans leur enseignement, augmentant dès lors le fossé avec leurs pratiques futures d'enseignement des mathématiques. Une des caractéristiques et forces des mathématiques académiques est en effet de travailler à rendre les compréhensions, concepts et idées mathématiques « compactes », « compressées », pour les rendre plus efficaces, puissantes et faciles à utiliser (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2003; Moreira et David, 2005). Toutefois, ceci les rend aussi opaques pour l'œil externe (Moreira et David, 2008) et apparaît en ce sens en conflit avec ce que l'enseignant sera appelé à faire dans sa pratique, son mandat étant alors davantage de décortiquer, « décompresser » et défaire les concepts mathématiques pour les rendre accessibles aux élèves (voir, entre autres, Huillet, à paraître). Comme il est souligné dans Bednarz (2001) et dans Brousseau (1998), l'enseignement des mathématiques requiert un retour aux concepts élémentaires et aux raisonnements sous-jacents pour arriver à promouvoir et aider à la construction de compréhensions mathématiques robustes chez les élèves.

problèmes, ou encore à verbaliser la mise en équation algébrique de tels problèmes (voir Schmidt et Bednarz, 1997 ; Bednarz, 2001), qui sont des exigences mathématiques quotidiennes pour l'enseignant de mathématiques. La facilité qu'éprouvent les étudiants en formation, sur un plan opératoire, à résoudre ces problèmes algébriquement apparaît dans ce cas ici aussi être un obstacle à une entrée possible sur la compréhension de ce qui est sous-jacent (la signification de l'équation, le processus de symbolisation, les autres manières d'approcher les problèmes, etc.).

Ces différences sont bien illustrées par une analyse des mêmes objets mathématiques tels qu'ils sont abordés aux deux niveaux d'enseignement (mathématiques scolaires et mathématiques académiques). Ces exemples permettent de mieux comprendre les ruptures entre les expériences vécues dans les deux cas. Moreira et David (2005) reprennent pour illustrer celles-ci l'exemple du travail sur les nombres rationnels. Ainsi, dans les cours de mathématiques auxquels le futur enseignant est confronté dans sa formation (mathématiques académiques), un nombre rationnel sera vu comme une classe d'équivalence de couples ordonnés d'entiers, définis par la relation « (a,b)~(c,d) si et seulement si ad=bc ». Au niveau scolaire, il en sera autrement, alors que cette introduction passera par l'extension des nombres naturels aux nombres rationnels, qui constitue un passage clé et difficile pour les élèves comme le montrent les nombreuses recherches dans le domaine (Brousseau, 1981 ; Vergnaud, 1988). De plus, pour aider les élèves à développer les concepts de nombre rationnel et d'opérations sur les rationnels, l'enseignant aura à s'appuyer sur différents sens de la fraction (partie d'un tout, mesure, rapport, etc.) et à en démonter la signification. On perçoit bien à travers cet exemple la nature distincte des concepts abordés dans les deux cas, et le fossé qui sépare les expériences mathématiques qui y sont travaillées[8].

Un autre exemple est celui du travail sur l'algèbre au niveau académique et scolaire. Dans les cours de mathématiques académiques, le futur enseignant, à travers les cours d'algèbre et d'algèbre linéaire notamment, est confronté aux structures algébriques et à l'introduction d'une algèbre abstraite, puissante et efficace, en rupture avec les pratiques futures d'enseignement de l'algèbre au secondaire (voir Corriveau et Tanguay, 2007, sur cette introduction à une algèbre et un formalisme différents au niveau post-secondaire en algèbre

[8] D'autres travaux montrent aussi la rupture entre ces expériences mathématiques vécues de part et d'autre. Par exemple, en France, Pian (2000, cité dans le rapport de la Commission Kahane, 2003, p. 64) note chez les étudiants en formation préparant leur examen de concours la quasi-absence de recours à des connaissances mathématiques avancées, qui dans certains cas pour répondre aux questions du concours auraient pourtant été nécessaires. Cette critique peut aussi se faire à un autre niveau, tel que l'a souligné un des évaluateurs, c'est-à-dire celui concernant la façon dont ces concepts ont été appris par les étudiants – un élément que nous reprenons plus loin en termes de « culture mathématique » ou de manières de faire les mathématiques en classe.

linéaire et aux ruptures qu'il provoque pour les étudiants ; voir aussi Furinghetti, 2000, p. 49). À l'opposé, l'enseignement de l'algèbre à l'école exige de l'enseignant qu'il revienne aux significations de base du symbolisme de manière à travailler à en faire voir la pertinence pour les élèves, à lui construire un sens, à percevoir la complexité de cette notation symbolique. Elle demande ainsi de déconstruire cette notation, de revenir aux diverses significations sous-jacentes de la lettre sur le plan conceptuel (inconnue, variable, paramètre, etc.), de comprendre ce que veut dire résoudre une équation, de voir les raisonnements susceptibles d'être mis en œuvre dans la résolution de problèmes, etc. (voir Bednarz, Kieran et Lee, 1996). On voit donc ici encore que pour un même domaine mathématique, l'algèbre, des aspects très différents et possiblement conflictuels vont être abordés par le futur enseignant (dans les cours académiques et dans ce que va exiger sa pratique en classe).

Ces analyses tendent à montrer que, par leur insistance sur le formalisme et l'abstraction et surtout par la nature « compacte et compressée » des concepts qui y sont abordés, les expériences mathématiques auxquelles sont confrontés les futurs enseignants dans les cours de mathématiques académiques apparaissent peu contribuer, pour les enseignants, au développement de connaissances *appropriées à leurs futures pratiques professionnelles* et peuvent même, comme nous l'avons vu, y nuire. À cela, un autre élément semble également important à prendre en considération dans cette analyse et c'est celui qui concerne les manières d'approcher les mathématiques.

### *2.2.3. Une immersion dans certaines manières de faire*

Une critique importante adressée aux cours de mathématiques académiques en regard de leur incidence possible concerne la manière même dont ces cours sont souvent approchés. Tels que l'explicitent Bauersfeld (1994) et Burton (2004), la façon usuelle dont les cours universitaires en mathématiques sont donnés se caractérise souvent par un style magistral et une exposition de savoirs mathématiques (concepts, définitions, axiomes, théorèmes, etc.). Les façons de faire et les habitudes mathématiques développées dans ces cours renvoient donc davantage à un corpus de « savoirs réifiés » qu'à une participation à un *processus de mathématisation*. On assiste à un important choc de cultures[9] – ou au renforcement d'une culture de classe caractérisée par une exposition de savoirs, éloignée des approches contemporaines potentiellement riches pour l'enseignement des mathématiques et propices à une dévolution des connaissances par l'apprenant (Brousseau, 1998).

> Developing out of the student teacher's experience of academic éducation, this habitus is the principal culprit in the reproduction of the widespread custom of lecturing, as has been documented so often in microsociological investigations of regular classrooms. (Bauersfeld, 1998, p. 218)

Pour Bauersfeld (1994, 1998), les enseignants ont besoin d'être immergés dans une certaine culture mathématique, dans une pratique à l'intérieur de laquelle les mathématiques sont travaillées, sont vivantes, plutôt que d'être introduits à un corpus de connaissances objectives où les mathématiques sont vues comme des absolus épistémologiques.

L'étude que Burton (2004) a conduite avec des mathématiciens est parlante à cet effet. Elle met en évidence (dans l'analyse du discours des mathématiciens) des différences entre les cultures d'enseignement et leur travail de production mathématique. Plusieurs des mathématiciens interviewés font ainsi ressortir de façon ironique l'incohérence entre leurs pratiques professionnelles de mathématiciens lorsqu'ils *font* des mathématiques et leurs

[9] L'analyse de Luk (2005) fait aussi ressortir la présence de ruptures importantes, entre les deux cultures mathématiques (scolaire et académique), vécues par les étudiants passant du secondaire à l'université en mathématiques. Le passage des mathématiques scolaires aux mathématiques universitaires s'accompagne d'exigences accrues dans l'utilisation du langage mathématique (passage au formalisme, langage mathématique formel, preuves formelles) et dans un niveau d'abstraction plus grand. Il s'accompagne aussi d'exigences accrues en termes de démonstration (exigences de rigueur entre autres pour la construction de preuves mathématiques). Ces ruptures, difficilement conciliables au niveau des façons de faire et de « penser » en mathématiques, amènent les étudiants à vivre des difficultés importantes dans le passage d'une culture à l'autre dans leur parcours académique.

pratiques d'enseignement centrées sur des cours axés sur une exposition des concepts, qui donnent une vision statique et préexistante des mathématiques, prêtes à être apprises ; alors qu'eux-mêmes voient les mathématiques comme étant en constante évolution et nécessitant une construction personnelle continuelle chez le mathématicien ou l'étudiant. Ainsi, les mathématiciens eux-mêmes affirment que les pratiques mises en place dans leurs cours universitaires ont peu à voir avec la façon dont les mathématiques sont produites. Cette analyse vient questionner la formation même donnée dans ces cours, très loin selon eux du véritable travail de production mathématique. Elle renforce le fait que l'enseignement donné dans ces cours académiques apparaît préparer peu les enseignants au processus de construction des concepts en mathématiques, aux façons de faire les mathématiques – et par le fait même contribue peu chez eux au développement de pratiques mathématiques riches et de compétences professionnelles pertinentes à leurs pratiques de classe[10].

Les divers aspects soulignés ci-dessus en regard des incidences possibles des cours de mathématiques de niveau universitaire (caractère formel des mathématiques abordées, nature compacte/compressée des concepts travaillés, immersion dans certaines manières de faire) débouchent sur un questionnement important quant à la pertinence des expériences mathématiques vécues dans ceux-ci pour la formation des enseignants du secondaire. De plus, une autre dimension à considérer, révélée par plusieurs travaux de recherche en didactique des mathématiques et qui vient de manière complémentaire interroger la formation mathématique

[10] Une nuance toutefois s'impose. Ce ne sont pas « tous » les cours universitaires en mathématiques avancées qui sont ainsi approchés (voir par exemple les approches innovatrices de Jones, 1977, Schoenfeld, 1985, Legrand, 1993, 2001). Tel que mentionné, plusieurs didacticiens et didacticiennes des mathématiques se sont intéressés aux questions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques en milieu universitaire (voir par exemple Dorier et al., 1997, Sierpinska, Dreyfus et Hillel, 1999, sur l'enseignement de l'algèbre linéaire ; Dubinsky, 2005, Tall, 2001, Hitt, 1998a, sur l'enseignement du calcul différentiel ; Bloch, 2000, sur l'enseignement de l'analyse). On pense également aux études ICMI sur l'enseignement supérieur (Holton, 2001 ; IJMEST, 2000), au numéro *7*(1) de la revue *Mathematical Thinking and Learning* ou encore au livre « advanced mathematical thinking » (Tall, 1991), qui regroupent un nombre imposant de travaux conduits dans le domaine à travers le monde. Ces derniers ont conduit à l'élaboration de situations, d'approches d'enseignement différentes, qu'il serait intéressant d'analyser plus à fond en contexte de formation des enseignants en regard des pratiques mathématiques qu'ils y développent.

reçue par les enseignants, a trait à la compréhension des concepts enseignés au secondaire. Les travaux de Cooney (voir, par exemple, 1999) montrent en effet qu'en dépit d'études avancées et de réussites importantes dans leurs études en mathématiques académiques, de nombreux futurs enseignants ont d'importantes lacunes conceptuelles en regard des mathématiques qu'ils vont enseigner en classe. Ce type de résultat, fort significatif, permet aussi de diriger les regards vers les mathématiques à enseigner, en tant que connaissances mathématiques à considérer pour la formation des enseignants (Cooney, *ibid.* ; Cooney et Wiegel, 2003). Regardons ce que les travaux de recherche nous disent sur les enseignants du secondaire et leurs connaissances des contenus mathématiques à enseigner.

## 3. Recherches sur les connaissances des enseignants à l'égard des mathématiques qu'ils enseignent

> Often the more mathematics courses a teacher takes, the wider the gap between the mathematics the teacher studies and the mathematics the teacher teaches. The result of the mismatch is that teachers are often no better prepared in the content they will teach than when they were students taking that content. A beginning teacher may know little more about logarithms or factoring trinomials or congruent triangles or volumes of cones than is found in a good high school text. (Usiskin, 2001, p.2)

Cette citation d'Usiskin, qui peut paraître évidente à prime abord, énonce bien le contexte de formation des enseignants et le fossé qui se creuse, plus ils avancent dans la formation mathématique universitaire, avec les mathématiques qu'ils auront à enseigner : les futurs enseignants ont travaillé pour la dernière fois ces concepts mathématiques alors qu'ils étaient eux-mêmes élèves au secondaire et étaient adolescents – avec toute l'immaturité que ceci peut amener, comme l'explique Cooney (1999).

Or, plusieurs recherches soulignent les difficultés vécues par les enseignants de mathématiques face aux contenus qu'ils auront à enseigner. Par exemple, les études de Ball

(1990) et Bryan (1999) montrent toute l'aisance des enseignants dans l'utilisation des procédures et algorithmes usuels en mathématiques, mais aussi leurs difficultés importantes à expliquer le sens derrière ces mêmes procédures (le pourquoi). L'étude de Schmidt et Bednarz (1997) et celle de Van Dooren, Verschaffel et Onghena (2003) font état de l'aisance des enseignants du secondaire avec l'utilisation de l'algèbre pour résoudre les problèmes, mais de leurs difficultés à faire du sens et à apprécier l'utilisation de procédures arithmétiques comme solutions valides à ces mêmes problèmes, de sorte qu'ils pourront difficilement assumer cette transition entre arithmétique et algèbre dans leur enseignement futur. Dans un autre domaine, les études de Even (1993) et Hitt (1998b) sur les fonctions montrent que les enseignants interrogés possèdent une « vieille » définition de fonction, restreinte à un tracé continu et fluide, qui les amène à ne pas reconnaître ou accepter des tracés différents pour représenter des fonctions en plus de les amener à transformer et traiter les fonctions discrètes comme des fonctions continues.

Ceci dit, tel que le soulignent la plupart des auteurs, en fouillant le passé scolaire de ces mêmes enseignants, on peut difficilement blâmer ces derniers puisqu'ils n'ont eu que peu de chances de travailler les concepts mathématiques en profondeur dans leur propre parcours scolaire (par exemple, le sens derrière les algorithmes, le sens des raisonnements algébriques et arithmétiques, les fonctions discontinues, etc.). Les commentaires suivants de deux enseignants du secondaire en mathématiques impliqués dans des projets de formation continue résument bien ces propos :

> « Vous savez pourquoi on n'est pas capable de résoudre par raisonnement ? C'est parce que nous n'avons pas été enseignés à raisonner en mathématiques. Moi, j'ai fait copier-coller-répète et « let's go » ! … et j'ai eu 95% en mathématiques! » (tiré de Proulx, 2007)

> « Je pense [avoir cheminé] depuis le primaire, sans réellement comprendre, sans savoir pourquoi, sans vraiment allumer […] c'est ça, tu sais [...] je me suis posée la question,

quand même, tu es allée à l'université, tu as fait des cours de maths, tu n'as jamais compris tout ça là. » (tiré de Bednarz et Barry, 2010)

Ces propos ont de quoi surprendre, voire même inquiéter, lorsque l'on sait dans un premier temps que ces enseignants ont tous reçu une formation mathématique à un niveau avancé et que dans un deuxième temps ces personnes enseignent les mathématiques aux élèves dans les classes. À cet effet, il est clair qu'on peut assister (si on replace ceci à l'échelle de la formation des enseignants) à un certain cycle de re-production de compréhensions mathématiques problématiques : d'élèves devenant maîtres, qui enseigneront à leur tour aux nouveaux élèves qui deviendront les prochains maîtres, etc. ; le manque de profondeur des raisonnements et les difficultés diverses pouvant alors se perpétuer d'une génération à l'autre.

Face à ce tableau quelque peu pessimiste, les expériences de formation continue centrées sur les contenus à enseigner, et ayant fait l'objet d'analyses sur le plan de la recherche, offrent un éclairage prometteur. Ainsi dans Bednarz et Barry (2010), deux recherches collaboratives sont analysées portant, d'une part, sur le développement des habiletés de calcul et la résolution de problèmes dans la transition primaire-secondaire en mathématiques (Bednarz, Maheux et Barry, 2007) et, d'autre part, sur le développement de la modélisation à propos de problèmes de dénombrement au début du secondaire (Barry et Bednarz, 2007), mettant en lumière l'apport des dispositifs ainsi mis en place. Les analyses de ces deux cas contrastés illustrent le potentiel de ces recherches collaboratives pour le développement professionnel des praticiens qui y sont engagés ; un développement professionnel qui s'exprime à travers une explicitation et une compréhension de leur pratique en enseignement des mathématiques, et ce, autour de contenus mathématiques (nombres naturels, décimaux, fractions, opérations, combinatoire) et de processus (processus de résolution de problèmes, développement de la modélisation, développement des habiletés de calcul). Ces contenus et processus sont revisités, conduisant à des recadrages de ces derniers intimement liés pour ces enseignants à un savoir agir en enseignement des mathématiques, qui va au fil de ces recherches collaboratives se complexifier.

C’est le cas aussi de la recherche de Proulx (2007) à l’intérieur de laquelle des enseignants similaires à ceux étudiés dans les recherches citées plus haut (à l’aise avec les procédures mathématiques, les algorithmes, mais ayant vécu peu d’expériences sur le développement de sens des concepts) ont été invités à travailler en profondeur sur les concepts mathématiques qu’ils enseignent pour en élargir leurs compréhensions et enrichir les raisonnements mathématiques sous-jacents. L’étude offre des résultats prometteurs, les enseignants ayant revisité leurs compréhensions mathématiques des contenus à enseigner. Ainsi, lorsque placés dans un environnement favorisant cette construction de sens, ces derniers développent des raisonnements mathématiques solides – nuançant par le fait même leurs « difficultés mathématiques » soulignées auparavant (voir Proulx, 2007, à paraître, pour plus de détails). Ces recherches illustrent ainsi l’intérêt de travailler en profondeur les concepts mathématiques que les enseignants enseignent, pour les amener à approfondir leurs compréhensions et raisonnements mathématiques autour de ces concepts (voir aussi les études de Bloom, 2004, 2007 ; Cooney, 1999 ; Hough, O’Rode, Terman et Weissglass, 2007 ; Thompson, Carlson et Silverman, 2007).

## 4. Retour sur la question de départ :
## Quels types d’expériences mathématiques porteurs pour la formation ?

Les propos mis en évidence soulignent des points importants que la recherche permet de pointer. Dans un premier temps, ils questionnent le lien courant établi entre le nombre de cours suivis en mathématiques (académiques) par les enseignants et la réussite des élèves en mathématiques. Les travaux de recherche dans le domaine de la formation des enseignants nous permettent d’aller plus loin et de questionner la pertinence des expériences mathématiques vécues par les futurs enseignants dans les cours universitaires, dans leur forme usuelle, comme modèle de préparation mathématique des futurs enseignants, alors que la nature des concepts qui y sont abordés, leur forme et la manière de les approcher apparaissent éloignées de ce qu'exigera la pratique professionnelle des enseignants dans leurs classes. De manière complémentaire, les difficultés importantes vécues par un nombre important de futurs enseignants de mathématiques face aux contenus qu'ils enseignent, et l'absence notée d'expérience de travail en profondeur sur ces concepts mathématiques durant leur parcours scolaire comme étudiant universitaire, viennent interroger en retour de façon importante la préparation mathématique universitaire des futurs enseignants telle qu'elle est habituellement conçue ; cette dernière apparaissant contribuer elle-même à creuser ce fossé avec les mathématiques enseignées en classe.

Ce qui précède questionne ainsi en profondeur l'orientation actuelle des programmes de formation centrée essentiellement, pour la composante préparation mathématique des enseignants, sur un ensemble de cours universitaires en mathématiques avancées, sans lien explicitement travaillé avec les mathématiques du secondaire. Cette mise en relation, cette articulation entre les ensembles de contenus et entre les manières d'approcher les mathématiques dans les deux cas, est en quelque sorte laissée à la charge de l'étudiant en formation, alors même que les recherches mettent en évidence le fossé important qui les sépare. Il appelle en conséquence à repenser quelque peu la nature des expériences mathématiques à offrir durant cette formation et fait ressortir l'importance de placer les futurs enseignants dans des environnements à l'intérieur desquels ils pourront travailler des contenus, processus et approches qui puissent aider à éclairer, mieux comprendre et enrichir les pratiques mathématiques qu'ils mettront en place dans leur enseignement. On ne parle donc pas ici de faire plus, moins ou un peu plus de mathématiques universitaires, ni d'atteindre un certain niveau/nombre minimum de contenus, etc., concernant les mathématiques universitaires, mais bien de travailler à faire vivre des expériences mathématiques (dans ces cours, dans de nouvelles activités complémentaires, etc.) qui soient potentiellement riches et signifiantes pour les pratiques d'enseignement des mathématiques du futur enseignant dans les classes du secondaire.

Cette réflexion qui amène à re-penser la formation mathématique des enseignants, une formation qui se voudrait davantage pertinente à leurs futures pratiques professionnelles, s'arrime aux diverses réflexions de plus en plus présentes dans le champ de la formation initiale et continue des enseignants en mathématiques. En témoignent, notamment : le mouvement de recherches portant sur les « Mathematics-for-Teaching » [Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2003; Davis et Simmt, 2006; Margolinas, Coulanges et Bessot, 2005]; la 15ème étude ICME sur le développement professionnel des enseignants [Lins et Olimpio, 2005; Even et Ball, 2008]; le numéro spécial 29(3) de la revue *For the Learning of Mathematics* paru en 2009 sur connaître et utiliser les mathématiques dans l'enseignement; les divers rapports produits autour de cette question [CBMS, 2001; Kahane, 2003], ou encore les nombreux groupes de travail et séminaires portant sur ces enjeux [le forum de recherche #01 sur les connaissances mathématiques et l'enseignement (voir Ball et al., 2009); le Groupe de Travail #1 sur « Formation mathématique des enseignants : contenus et pratiques » lors du congrès *Espace Mathématique Francophone* 2009 (voir Hache, Proulx et Sagayar, à paraître); le Topic Study Group #27 sur « Mathematical knowledge for teaching » lors du congrès ICME-11 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/30); la série de séminaires sur le « Mathematical knowledge in teaching » initiés par K. Ruthven et T. Rowland (http://www.maths-ed.org.uk/mkit); le Groupe de Travail B sur les connaissances mathématiques dans et pour l'enseignement lors du congrès du Groupe Canadien d'études en didactique des mathématiques (Kieran, Kubota-Zarivnij et Mason, 2009); etc.]. Ces différents travaux s'appuient sur un corpus de données empiriques et des réflexions théoriques qui ouvrent la voix, et ce mouvement est en ce sens important, à de nouvelles façons de penser la formation mathématique des enseignants.

C'est sur une de ces pistes possibles que se centre la 2ème partie de cet article. Nous tenterons de dégager deux thèmes qui pour nous émergent de façon significative des analyses précédentes comme voie possible à explorer en ce qui a trait aux expériences mathématiques potentiellement riches à offrir aux futurs enseignants : le travail sur ce que nous appelons les mathématiques professionnelles de l'enseignant et l'immersion dans une culture de mathématisation.

## Remerciements

Le projet soutenant l'écriture de cet article a été rendu possible grâce au financement accordé par le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (subvention # 410-2008-0284).

## Références

Adler, J., et Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 270-296.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L., Charalambous, C. Y., Thames, M., et Lewis, J. M. (2009). RF01: Teacher knowledge and teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou et H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 121-150). PME.

Ball, D. L., et Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt et B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., et Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Barry, S., et Bednarz, N. (2007) Combinatorial modeling: Insights from the problem solving activities of grade 7 students. *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, October 25-28, Lake Tahoe, USA. CD-ROM

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *20*(1), 175-198.

Bauersfeld, H. (1998). Remarks on the education of elementary teachers. In M. Larochelle, N. Bednarz, & J. Garrison (Eds.), *Constructivism and education* (pp. 213-232). Cambridge: Cambridge University Press.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61-80.

Bednarz, N., et Barry, S. (2010). Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques comme soutien au développement professionnel des enseignants. Dans C. Couture et L. Dionne (Eds.) *La formation et le développement professionnel des enseignants dans le domaine des sciences, de la technologie et des mathématiques: recherches et approches novatrices en Belgique, en France et au Canada*. (pp. 225-253). Ottawa: Presses de l'Université d'Ottawa.

Bednarz, N., Kieran, C., et Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Maheux, J.-F., et Barry, S. (2007). Development of professional knowledge in mathematics education grounded in context: Analysis of a collaborative research approach aiming to support this development. In L. Teruni et L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 788-795). PME-NA: Nevada, États-Unis.

Bednarz, N., et Perrin-Glorian, M.J. (2003). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003*. Tunis: Éditions CNP.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Finding from a survey of the empirical literature*. Washington, DC: MAA et NCTM.

Bloch, I. (1997). Les connaissances mathématiques de l'enseignant, pour l'enseignement. *Petit x*, *45*, 5-24.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université: savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat inédite, Université de Bordeaux 2.

Bloom, I. (2004). Mathematics for teaching: Facilitating knowledge construction in prospective high school mathematics teachers. In D. E. McDougall et J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the 26th annual meeting of the North American chapter of Psychology in Mathematics Education* (vol. 3, pp. 1349-1355). Toronto, Ontario, Canada: OISE/UT.

Bloom, I. (2007). Extended analyses: Promoting mathematical inquiry with preservice mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 399-403.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bryan, T. J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. Volume 1: Content Knowledge*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Clarke, D., Keitel, C., et Shimizu, Y. (Eds.). (2007). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Conference Board of the Mathematical Sciences. [CBMS] (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Providence, RI et Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 163-187.

Cooney, T. J. (2001).Using research to inform pre-service teacher education programmes. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 455-466). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cooney, T. J., et Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, et F. K. S. Leung (Eds.), S*econd international handbook of mathematics education* (Vol. 2, pp. 795-828). Great Britain: Kluwer.

Corriveau, C., et Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *48*(1), 6-25.

Davis, B., et Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Dorier, J.L., Harel, G., Hillel, J., Rogalski, M., Robinet, J., Robert, A., et Sierpinska, A. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dubinski, E. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253-266.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Even, R., et Ball, D. L. (Eds.) (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*. New York: Springer.

For the Learning of Mathematics (2009). *Knowing and Using Mathematics in Teaching (special issue)*, *29*(3).

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 43-51.

Gattuso, L. (2000). Quel est le rôle du didacticien? In P. Blouin et L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 14-18). Montréal, QC: Éditions Modulo.

Hache, C. (1999). *L'enseignement de mathématiques au quotidien: Étude de pratiques en classe de secondaire*. Thèse de doctorat inédite, Université Paris 7-Denis Diderot.

Hache, C. (2001). L'univers mathématique propose par le professeur en classe: observation, description, organisation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1-2), 81-98.

Hache, C., Proulx, J., et Sagayar, M. M. (à paraître). Synthèse du GT#1 – Formation mathématique des enseignants: contenus et pratiques. In A. Kuzniak et M. Sokhna (Eds.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2009. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Université Cheikh Anta Diop : Dakar, Sénégal. CD-ROM.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement des mathématiques: Le cours dialogue. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *4*(2), 243-261.

Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different représentations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Hitt, F. (1998b). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 7-26.

Holton, D. (Ed.) (2001). *The teaching and Learning of mathematics at univesfity level : An ICMI Study.* The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Hough, S., O'Rode, N., Terman, N., et Weissglass, J. (2007). Using concept maps to assess change in teachers' understandings of algebra: A respectful approach. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(1), 23-41.

Huillet, D. (à paraître). Mathématiques pour l'enseignement: une approche anthropologique. In A. Kuzniak et M. Sokhna (Eds.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2009. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Université Cheikh Anta Diop : Dakar, Sénégal. CD-ROM.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (2000). *Selected papers from ICMI-11 study conférence (special issue)*, *31*(1).

Jones, F. B. (1977). The Moore method. *American Mathematical Monthly*, *84*, 273-278.

Kahane, J.-P. (2003). *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques – La formation des maîtres en mathématiques*. smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane

Kieran, C., Kubota-Zarivnij. K., & Mason, J. (2009). Working Group B report. Mathematics-in-and-for-Teaching (MifT) : The case of algebra. In P. Liljedhal (Ed.), *Proceedings of the 2008 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 41-54). Burnaby, BC : CMESG.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint – Arithmetic, algebra, analysis* (trad. E.R. Hedrick et C.A. Noble). New York: Macmillan.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, *10*, 123-158.

Legrand, M. (2001). Scientific debates in mathematics courses. In D. Holton (Ed.), *The teaching and Learning of mathematics at univesfity level : An ICMI Study* (pp. 127-136). The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Lins, R., et Olimpio Jr., A. (Eds.) (1995). *Contributed papers, demonstrations and worksessions: The 15th ICMI study – The Professional education and development of teachers of mathematics*. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.

Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 161-174.

Margolinas, C., Coulange, L., et Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 205-234.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review*, *13*(2), 125-145.

Moreira, P. C., et David, M. M. (2005). Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice: A revealing confrontation. In R. Lins & A. Olimpio Jr. (Eds.), *Contributed papers, demonstrations and worksessions: The 15th ICMI study – The Professional education and development of teachers of mathematics*. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.

Moreira, P.C., David, M.M. (2007). *A formaçao mathematica do professor. Licenciatura e pratica docente escolar*. Sao Paulo: Autentica Editora. Coleçao Tendencias em Educaçao Matematica.

Moreira, P. C., et David., M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 23-40.

Nathan, M. J., et Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.

National Research Council [NRC]. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, et B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.

Ngono, B. (2003). *Étude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en zone d'éducation prioritaire (ZEP): Effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages*. Thèse de doctorat inédite, Université Paris 7-Denis Diderot.

Oliveira, I. (2008) *Exploration des pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec le développement du raisonnement proportionnel chez les élèves*. Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal.

Otte, M. (1976). A6 : The training and professional life of mathematics teachers. In H. Athen et H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematics Education* (pp. 194-201). Karlsruhe, Germany: ICME-3.

Proulx, J. (2007). *(Enlarging) secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge: An investigation of professional development*. Thèse de doctorat inédite, Université de l'Alberta, Canada.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., et Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51–73.

Robert. A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1-2), 57-80.

Roditi, É. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Schmidt, S., et Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: Difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 127-155.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., et Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 7-40.

Smida, H., Rouan, O., Ould Sidaty, M.A., Abdelli, M. (2007). Les dispositifs de formation des enseignants en mathématiques des pays du Maghreb face aux défis de l'école. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *7*(2-3), 209-229.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer: Dordrecht, The Netherlands.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinite. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199-238.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., et Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teacher' development in coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432.

Thompson, A. G., et Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part 2: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 2-24.

Thompson, P. W., et Thompson A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part 1: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 279-303.

Usiskin, Z. (2001). *Teachers' mathematics: A collection of content deserving to be a field*. Présentation au National Summit on the Mathematical Education of Teachers. http://www.cbmsweb.org/NationalSummit/WG_Speakers/usiskin.pdf

Van Dooren, W., Verschaffel, L., et Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert and B. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: NCTM.