

LES LABORATOIRES DE MATHÉMATIQUES POUR ENSEIGNER, UNE MÉTAPHORE PRODUCTIVE

Hier et aujourd'hui, pour les élèves comme pour les maîtres

Luc Trouche

Institut National de recherche Pédagogique et Université de Lyon, France

Luc.Trouche@inrp.fr

Résumé

La métaphore des "laboratoires" pour faire et apprendre des mathématiques apparaît dans l'histoire dès lors que l'on veut renouveler, développer cet enseignement. La conférence montrera l'évolution de cette métaphore, depuis la création d'ICME (1908). Les laboratoires de mathématiques sont toujours présentés en relation avec les instruments qu'ils contiennent, l'évolution de la métaphore accompagne donc l'évolution de ces instruments.

On montre dans cet article comment l'évolution des environnements technologiques permet de concevoir, dans l'espace de la classe de mathématiques "ordinaire", des moments de vie d'un laboratoire de mathématiques, puis de prolonger, à distance, ces laboratoires.

On montre aussi que le développement des laboratoires de mathématiques pour les élèves suppose un développement des laboratoires de mathématiques pour les professeurs. On appuiera ce point de vue sur l'expérience française d'une association de professeurs concepteurs de ressources en ligne, Sésamath.

On en déduit la nécessité de nouvelles approches théoriques articulant conception de ressources, évolution des pratiques, et développement professionnel, et combinant aspects individuels et collectifs du travail des professeurs.

Resumo

Xxx

La métaphore des laboratoires mathématiques est ancienne. On la trouve par exemple sous la plume du mathématicien français Borel, pour appuyer une réforme de l'enseignement (1902) qui veut promouvoir les apprentissages scientifiques comme composante essentielle du développement intellectuel des élèves du XXème siècle.

C'est une métaphore régulièrement revisitée, par exemple par la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (ICMI) lors de sa création à Rome (Maschietto et Trouche 2010). Les laboratoires sont alors liés à la manipulation d'objets et d'outils pour découvrir des propriétés ou mettre à l'épreuve des conjectures.

Mais les laboratoires apparaissent toujours à l'état de *projets*, qui mettent en évidence le coût nécessaire de leur mise en œuvre (en particulier pour la formation des maîtres). Le développement de l'informatique apporte de nouveaux outils, et questionne, au-delà de l'enseignement, la nature des mathématiques et les conditions de leur pratique.

On trouve dans la littérature une variété de description de laboratoires, avec deux pôles dont on voit bien la complémentarité : soit un lieu spécifique, champ d'expérimentation en marge du curriculum ; soit sur un ensemble structuré d'activités, visant la construction de significations mathématiques profondes, au cœur des classes ordinaires.

Uma metáfora antiga...



« O ideal do laboratório de Matemática seria, por exemplo, uma oficina de marcenaria e o mestre seria um carpinteiro.

Sob a direção do professor de Matemática, aconselhados pelo mestre, os alunos trabalhariam em pequenos grupos na confecção de modelos e aparelhos simples.

Se tivéssemos um torno, eles poderiam construir superfícies de revolução com polias e cordas, eles fariam experiências de Mecânica, verificariam de forma concreta o paralelogramo de forças, etc.

Teria em um canto uma balança de mercearia, água e alguns recipientes permitiriam que os alunos trabalhassem, com dados concretos, os problemas clássicos de vazão. »

(Borel, 1904)

... frequentemente revisitada



« Muitas escolas dedicaram longas discussões sobre o papel que deve ser atribuído às considerações de ordem prática e experimental:

- No ensino elementar, pode-se mencionar, por exemplo, as dobraduras de papel, os trabalhos ao ar livre, utilização de instrumentos simples para medir, a geometria da observação, etc. o cálculo prático e aproximado (uso de tabuadas, etc.), a questão geral de gráficos em Álgebra, a utilização mais generalizada de papel quadriculado...
- Falou-se nesses últimos anos dos *laboratórios de matemática*. O que foi feito nesse sentido e quais são os resultados? »

(ICMI, 1908)

... para reformar o ensino



« As escolas de Ensino Médio poderiam acomodar laboratórios de ciência matemática ao lado dos laboratórios de ciências físicas. Alunos e professores encontrariam ali documentação, recursos informáticos, software ... que poderiam constituir oficinas. Poderiam ser reservados horários para a formação continuada de professores.

Estas propostas parecem ambiciosas e razoáveis. Ambiciosas pois implicam evoluções de todos aqueles que atuam no sistema educativo. Razoáveis porque os professores de Matemática hoje estão abertos à mudança.

Existe entre a Matemática e a Informática uma solidariedade fundamental baseada na história (Turing, Von Neumann) e nas práticas atuais... »

(Kahane, 2000)

... com definições variadas

- 1) A *room*, equipped with some material: computers, books, and all kinds of objects that can be used for mathematical experiments or constructions [...]; the first thing to think about, a good set of *open activities* to propose to the children. The main feature of laboratories is that they should *feel free*, not under pressure. For the teachers also, math. laboratories are a field of experimentation, *out of any curriculum* (Barbeau & Taylor, 2006).
- 2) A math. laboratory is [...] a *structured set of activities aiming to construct meanings* for mathematical objects, [...] showing similarities with the concept of Renaissance workshops where apprentices *learned by doing and watching what was being done*, *communicating* with one another and with the experts (Anichini et al. 2003)

Cette variété apparaît bien dès qu'on interroge un moteur de recherche avec les mots clés « laboratoires de mathématiques – lycée » : on trouve alors des ressources institutionnelles pour développer des « moments » de laboratoire dans les classes, aussi bien que des idées pour développer des structures à côté des classes.

Google
laboratoires de mathématiques lycée
Rechercher dans : Web, Images, Vidéos, Pages, France

Web
Résultats 1 - 10 sur un total d'environ 128 000 pour laboratoires de mathématiques lycée

EduSCOL - Mathématiques/Ressources
Ressources pour le lycée : Centre de ressources générales et disciplinaires ... nouvelles de programmes de mathématiques-informatique de la classe de première L ...
eduscol.education.fr/000154/PLH/MATH000.htm - 52 ko - 1 page, 5 images

Les laboratoires de mathématiques
Format de fichier : PDF (Adobe Acrobat) - Voir en HTML
Le laboratoire de mathématiques du lycée Auphant Claude de ... www.eduscol.education.fr
Laboratoire de mathématiques du lycée A. Claudot de Nîmes de page 1 ...
eduscol.education.fr/000154/PLH/MATH000.htm - 52 ko - 1 page, 5 images

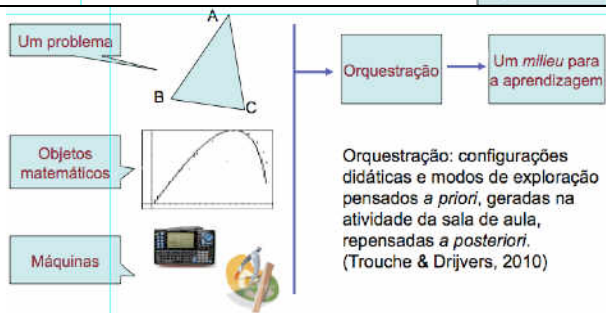
Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques ...
Les laboratoires de mathématiques. Il s'agit de créer, dans tous les lycées et collèges, des laboratoires de mathématiques symbiotiques aux laboratoires de ...
ant.univ-lille.fr/enseignement/rapports/CommissionMathematiques.pdf - 5 ko - 5 images

pour des chercheurs et un laboratoire de mathématiques dans un lycée
Format de fichier : PDF (Adobe Acrobat) - Voir en HTML
Laboratoire de mathématiques dans un lycée par Jean-Claude Châtel. Le registre que l'on consulte entre le ... lycée un laboratoire de mathématiques. 11 mai ...
mathematiques.free.fr/annuaire/annuaire/950/95200.pdf - 1 ko - 1 page, 5 images

Diagram illustrating initiatives:

- Iniciativas institucionais
- Iniciativas pessoais apoiadas por instituições
- Iniciativas de sociedades científicas
- Iniciativas de associações específicas

Mettre en œuvre moments de laboratoire dans les classes suppose de disposer de « bons » problèmes, d'objets mathématiques et d'outils pour les manipuler. Cela suppose aussi de penser une orchestration de ce problème, appuyant une mobilisation pertinente des instruments à la disposition des élèves.



Les technologies informatiques donnent de nouveaux outils pour ces orchestrations, par exemple les réseaux de calculatrices, que le professeur peut exploiter de différentes façons (en superposant les résultats des élèves sur un même écran, ou en juxtaposant ces résultats pour permettre leur discussion par toute la classe).

Novos meios para apoiar o trabalho coletivo

Calculadoras em rede, permitindo ao professor explorar diferentes configurações:

- exibir todos os dados experimentais dos alunos em um mesmo sistema de eixos;
- comparar os gráficos obtidos pelos alunos em uma mesma tela.

J'ai suivi cet exemple dans une classe (10^{ème} grade), dans cet environnement de réseau de calculatrices. Il s'agissait d'étudier les variations de l'aire d'un triangle isocèle en fonction de la base. Le professeur choisit de faire travailler les élèves avec des outils « anciens », règle graduée et compas. Les élèves rassemblent des couples de données (base, aire) de triangles différents. Le réseau de calculatrices est mobilisé pour envoyer ces données sur l'écran commun.

Um exemplo...

AB = AC = 10 cm, qual a área do triângulo ABC?

- ✓ Objetivo: o conceito de função (área em função de BC);
- ✓ Manipulação de ferramentas « antigos » (régua, compasso)
- ✓ Envio de dados para a tela;
- ✓ Um objeto se constitui, criação coletiva;
- ✓ Inúmeros problemas (imprecisão de medidas ou erros de cálculo, curva ou nuvem de pontos...);
- ✓ Co-elaboração de uma fórmula matemática que modeliza o problema dado.

La classe vit alors comme un laboratoire mathématiques. Les questions fusent : les points forment-ils une courbe ou un nuage ? Comment avoir beaucoup de points « automatiquement » ? La recherche d'une formule est le moyen « économique » d'accumuler les résultats et d'obtenir une courbe qui ajuste les points obtenus. De nouvelles questions apparaissent : comment expliquer, justifier le maximum ?

Le ministère français a tenté de favoriser le développements de ces moments de laboratoires dans les classes en les introduisant aussi dans les évaluations, en particulier au baccalauréat : l'épreuve pratique de mathématique propose aux élèves la résolution d'un problème assez ouvert, supposant la formulation de conjectures en utilisant les technologies.

Dans l'exemple ci-contre, on peut découvrir la « philosophie » de cette épreuve. Il s'agit d'abord de construire des objets (ici une courbe) à l'aide d'une calculatrice, puis de formuler des conjectures avant tout calcul. L'élève appelle ensuite le professeur pour avoir un avis sur la justesse de la construction ou la pertinence des conjectures.

C'est après cet avis que l'élève choisit de reprendre la construction, ou de formuler de nouvelles conjectures, ou d'engager une démarche de preuve. Constructions et conjectures sont entrelacées : par exemple, l'élève doit remarquer que les deux tangentes aux points d'abscisses a et $-a$ se coupent sur l'axe des ordonnées, ce qui suppose de rechercher des invariants dans différentes configurations.

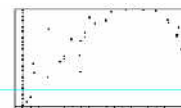
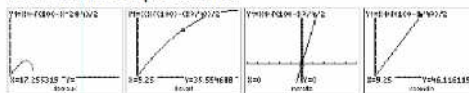
Um exemplo...

Escolhas didáticas complexas para o professor:

- ✓ exibir, ou não, os nomes dos alunos autores;
- ✓ informar, ou não, a janela a ser escolhida para o gráfico;
- ✓ como gerenciar a discussão (o debate científico), tirando as significações?

Uma análise *a posteriori* reveladora

Uma viabilidade assegurada pelo *interesse institucional* e o *trabalho colaborativo* dos professores



Evoluções institucionais...

O Ministério francês experimenta, desde 2007, uma prova prática de Matemática no « baccalauréat »

« O objetivo da prova é avaliar as competências dos alunos na utilização de calculadoras e softwares específicos em Matemática. Trata-se de avaliar nos alunos, a capacidade de mobilizar as tecnologias da informação e da comunicação para o ensino (TICE) para resolver um problema matemática

Os temas propostos aos candidatos são exercícios de Matemática nos quais a utilização das TICE (calculadoras gráficas programáveis, computadores e softwares específicos, softwares livres de preferência, planilhas, geometria dinâmica, CAS) intervêm de maneira significativa na resolução do problema proposto. »

(MEN, 2007)

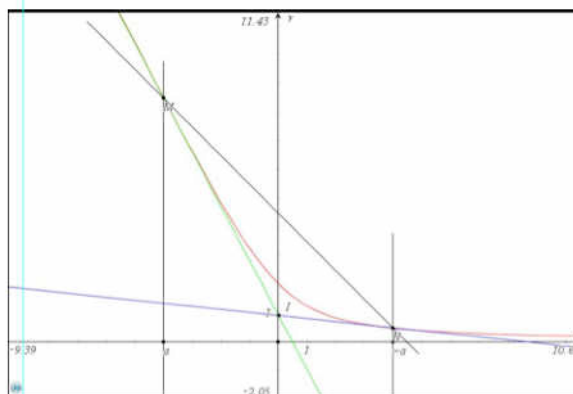
Um exemplo...

Seja uma função definida sobre $\mathbb{R}$ por: $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$.

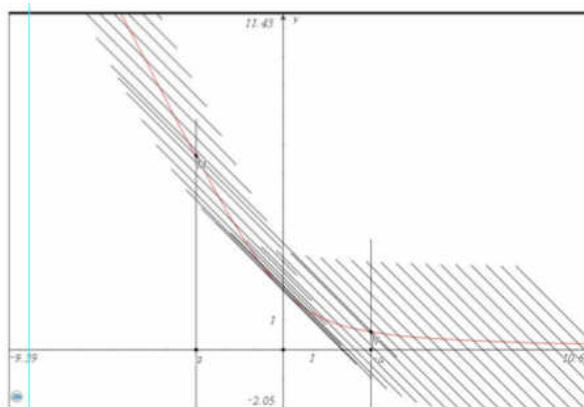
Nota-se C sua curva representativa num sistema ortogonal

Seja a um real qualquer, M e N os pontos de C de abscissas respectivas a e $-a$.

- 1) Construir a curva com o auxílio de um software de sua escolha, chamar o examinador para verificação.
- 2) Variar a e formular conjecturas relativas, respectivamente, à reta MN e à intersecção I das tangentes à C em M e N . Chamar o examinador para verificação das conjecturas.
- 3) Determinar em função de a as coordenadas dos pontos M e N . Justificar as conjecturas enunciadas na questão 2.



Autre conjecture : quand a varie, la droite MN garde une pente constante. Le « jeu » mathématique ne mobilise pas que le registre graphique : des calculs réalisés par ailleurs peuvent aussi appuyer les conjectures, mettre en évidence des régularités que le registre graphique ne révèle pas toujours aussi facilement. Les laboratoires mathématiques peuvent ainsi s'inviter dans ces moments d'évaluation pourtant très contraints...



Cette expérience de renouvellement du baccalauréat a suscité à la fois l'enthousiasme de certains professeurs, et des réactions hostiles, tant elle bousculait des habitudes professionnelles anciennes. Finalement, elle conduisait à revoir l'ensemble du baccalauréat : sa généralisation a donc été reportée en 2013...

« A prova induz uma relação diferente dos alunos com a Matemática (atividade experimental, várias tentativas possibilitadas pelo uso das TICE, conjecturas necessárias...) Ela induz também processos de ensino diferentes, dando mais importância ao processo de investigação. Ela coloca em jogo uma avaliação diferente, considerando a atividade do aluno mais que seu resultado. A generalização desse tipo de prova deve fazer evoluir o ensino de Matemática » (Fort, 2007). E ainda assim... Nenhuma generalização prevista antes de 2013! Dificuldade de evoluções que tocam os pontos sensíveis do ensino de Matemática...

Un phénomène récent, liée aux mutations numériques, renouvelle la façon de penser les laboratoires : c'est le développement d'associations d'enseignants qui conçoivent et partagent des ressources en ligne. En France, Sésamath est un exemple caractéristique de ce processus.

Sésamath (<http://www.sesamath.net/>), uma recente associação de professores de Matemática (2001)...
... um crescimento muito rápido (100 membros, 5000 professores em grupos de projeto, 100.000 conexões por dia)...
... uma filosofia do doar, do dividir e do serviço público



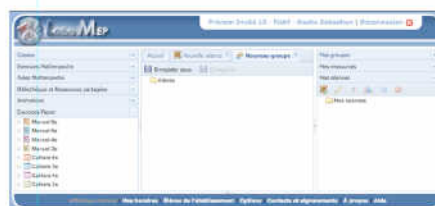
Sésamath, ce sont des milliers d'enseignants qui travaillent ensemble dans des groupes de projets, qui mettent à la disposition de dizaines de milliers de professeurs des ressources nouvelles pour leur enseignement. Le site Mathenpoche propose ainsi des exercices, regroupés suivant les niveaux et les thèmes d'enseignement.

Mathenpoche: um dos projetos de destaque da associação, centenas de exercícios que podem ser baixados livremente, que podem ser comentados ou enriquecidos...



Cette dernière année, l'association Sésamath a franchi un pas supplémentaire, en développant une nouvelle interface « LaboMep » (Laboratoires de mathématiques en poche), permettant aux professeurs de travailler ensemble à la construction de nouvelles activités pour les élèves.

LaboMep: uma interface « laboratório » de concepção, experimentação, compartilhamento de recursos, a partir do banco inicial do Mep (Math en poche), uma versão adaptada para trabalhar em rede na sala de aula.



Il semble y avoir une relation profonde entre le travail que les professeurs de Sésamath réalisent dans leur propre laboratoire, LaboMep, et l'activité de laboratoire qu'ils développent dans leur propre classe. J'ai ainsi pu suivre le travail d'un professeur de Sésamath, Pierre, dans sa propre classe : le temps et l'espace du travail mathématique sont profondément réorganisés.

A sala de aula do professor Pierre

Uma reorganização do espaço e das relações entre professores, alunos e ferramentas (quadro negro, lousa inteligente, softwares, recursos da Internet...)



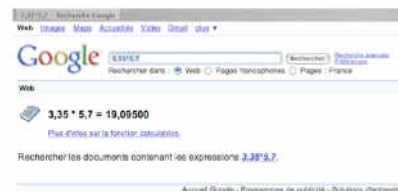
Les élèves ont dans ce contexte une responsabilité importante dans la prise en charge des problèmes mathématiques. Ils travaillent la plupart du temps en groupe, largement Internet pour rechercher les ressources nécessaires (par exemple pour avoir les résultats de multiplications...). Le rapport au savoir est ainsi profondément transformé.

Os alunos do professor Pierre

Usar o Google para fazer uma multiplicação...

Busca-se o resultado de uma multiplicação da mesma forma que se busca o número de habitantes de São Paulo

O paradigma da rede substitui o paradigma da flecha



On a beaucoup parlé, dans ce qui précède, de « ressources ». En français, ou en anglais, on peut définir une ressource comme ce qui re-source le travail du professeur ou de l'élève. Ce jeu sur les mots n'est pas possible en espagnol ou portugais, mais l'idée reste, de la nécessité d'un renouvellement des pratiques et du « matériel didactique », en donnant à cette expression un sens très large.

Em Francês (vs Inglês)	Em Português (vs Espanhol)
Source	Fontes
Ressource (= re-source)	Recursos

Esso significa: "regenerar", "recarregar", "realimentar".

Finalmente, ce qui ressort de ce tour d'horizon, c'est que les technologies, anciennes comme nouvelles, donnent bien de nouveaux moyens pour les laboratoires mathématiques, ouvrant l'activité des élèves comme des professeurs vers davantage de collaboration et supposant des évolutions institutionnelles fortes.

Finalmente...

As TIC (em particular os recursos *on-line*), novos meios para os laboratórios de Matemática.

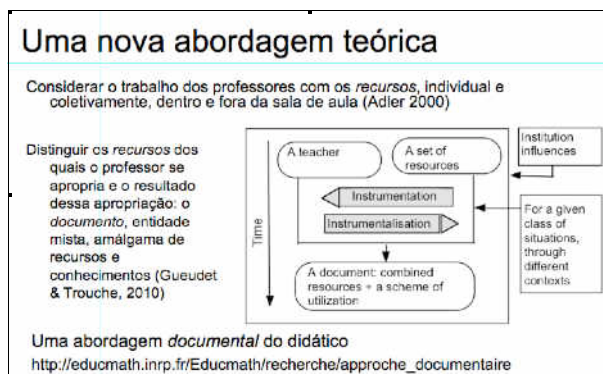
Articular antigas e novas tecnologias (Maschietto et Trouche, 2010)

Articular novas formas de trabalho dos alunos e novas formas de trabalho do professor.

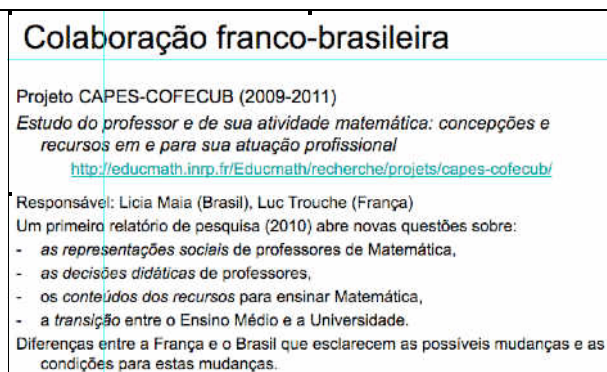
Articular a mudança de cima (currículo, avaliações) e a mudança pelos professores (colaboração entre seus pares).

Para a pesquisa, pensar mais nos processos de *design* de recursos « vivos » (Gueudet et Trouche, 2010) e nos aspectos coletivos do desenvolvimento profissional de professores.

Revenons pour conclure à cette thématique des ressources pour l'enseignement, au-delà de la thématique des laboratoires. L'étude du travail des professeurs à partir du jeu entre les ressources (qu'il utilise, qu'il conçoit, qu'il partage), sa pratique (en classe et hors classe) et ses connaissances ouvre de nouveaux horizons théoriques, explorés dans le cadre de l'approche documentaire du didactique que je développe aujourd'hui.



La collaboration entre le Brésil et la France, engagée dans le cadre de l'accord CAPES-COFECUB est un bon cadre pour développer cette approche, à travers les quatre axes qui structurent cette collaboration, en particulier l'axe 3 sur les ressources. Les rencontres que nous avons eues lors du colloque pre-PME à Sao Paulo, comme celles que nous venons d'avoir dans le colloque HTEM augurent bien des développements à venir.



En venant ici, je me disais qu'il y a avait beaucoup de raisons de penser à Lévi-Strauss, mort récemment : son évocation de Recife, à l'ouverture de Tristes Tropiques (« *A 5 h 30 du matin, nous entrions en rade de Recife tandis que piaillaient les mouettes...* »), mais l'apport de son œuvre à la compréhension du bricolage constituant les ressources de l'activité humaine ou, enfin et surtout, l'idée profonde qu'une fraction de l'humanité ne peut se comprendre qu'en référence à toutes les autres.



Références

- ANICHINI, G., ARZARELLO, F., CIARRAPICO, L., & ROBUTTI, O. *Matematica* 2001. *La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*. LUCCA: Matteoni Stampatore, 2003
- ARCAVI, A., & HADAS, N. Computer mediated learning, an example of an approach, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45, 2000.
- BARBEAU, E., & TAYLOR, P. J. *Challenging mathematics in and beyond the classroom: the 16th ICMI study*. New York: Springer, 2008.
- BOREL, E. *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*, 1904, http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf
- FORT, M. Rapport sur l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au bac S, MEN, 2007, <http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/rapportep>
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218, 2009, <http://springerlink.metapress.com/content/6600hx1254664n74/>
- HOYLES, C., KALAS, I., TROUCHE, L., HIVON, L., NOSS, R., & WILENSKI, U. (2009), Connectivity and Virtual Networks for Learning, in C. HOYLES, & J.-B. LAGRANGE (eds.), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain* 439-462, New York: Springer, 2009.
- ICMI, Les tendances modernes de l'enseignement des mathématiques, L'enseignement mathématiques, 10, 454-456, 1908, <http://www.unige.ch/math/EnsMath>
- KAHANE, J.-P. (dir.) *Informatique et enseignement des mathématiques*, 2001 <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf>
- MASCHIETO, M., & TROUCHE, L. Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 33-47, (2010), <http://www.springerlink.com/content/48045470220u4073/>
- Ministère de l'Education Nationale (MEN), *L'épreuve pratique du baccalauréat de la série scientifique*, 2007, http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_presentation.htm

TRGALOVA, J., JAHN, A.P, & SOURY-LAVERGNE, S. Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project, in V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello, *Proceedings of CERME 6*, 1161-1170, INRP, 2009, <http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-7>

TROUCHE, L., & DRIJVERS, P., Handheld technology for mathematics education: flashback into the future, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681, 2010, <http://www.springerlink.com/content/68n07260752h5260/>,2010