ISSN 2177 - 9309 https://doi.org/10.51359/2177-9309.2024.262089

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

GENERALIZAÇÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS USANDO O GEOGEBRA E PROCESSOS ANALÍTICOS

Generalizations involving the Pythagorean Theorem using GeoGebra and analytical processes

José António Fernandes
Doutor em Educação
Universidade do Minho – Portugal
jfernandes@ie.uminho.pt
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X

Resumo

Neste estudo explora-se o Teorema de Pitágoras e várias generalizações envolvendo esse teorema, com recurso ao GeoGebra e a processos analíticos. Para tal, estabeleceram-se os dois seguintes objetivos na exploração das tarefas propostas: 1) discutir as potencialidades do uso do GeoGebra; e 2) analisar a dimensão matemática desenvolvida. Exploradas as tarefas propostas, verificou-se que o GeoGebra mostrou ser uma ferramenta com elevado potencial para criar e analisar exemplificações das generalizações estudadas e, complementarmente, proporcionou pistas para a prova dessas generalizações. Já do ponto de vista matemático, salienta-se a grande diversidade de objetos matemáticos intervenientes no estudo das generalizações, bem como suas relações, de entre os quais se destacam os argumentos desenvolvidos na prova. Donde, globalmente, as tarefas propostas são especialmente adequadas para realizar sínteses de aprendizagens anteriores, podendo os alunos trabalhar em pequenos grupos em trabalhos de projeto.

Palavras-Chave: Teorema de Pitágoras; generalizações; GeoGebra.

Abstract

This study explores the Pythagorean Theorem and several generalizations involving this theorem, using GeoGebra and analytical processes. To this end, the following two objectives were established in exploring the proposed tasks: 1) discuss the potential of using GeoGebra; and 2) analyse the mathematical dimension developed. After exploring the proposed tasks, it was found that GeoGebra proved to be a tool with high potential for creating and analysing exemplifications of the generalizations studied and, in addition, provided clues to proof these generalizations. From a mathematical point of view, the great diversity of mathematical objects involved in the study of generalizations, as well as their relationships, among which the arguments developed in the proof stand out. Therefore, overall, the proposed tasks are especially suitable for synthesizing previous learnings, allowing students to work in small groups on project work.

Keywords: Pythagorean Theorem; generalizations; GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Desde a década de 1970 que a influência das tecnologias digitais no ensino, e em particular no ensino da matemática, não tem deixado de aumentar. A nível internacional, a publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics*, do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), constituiu um importante marco do movimento de introdução das tecnologias digitais nas escolas, quer em Portugal quer em muitos outros países. Atualmente, essa tendência está bem patente nos programas escolares portugueses (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2021, 2023) e na *Base Nacional Comum Curricular* do Brasil (BRASIL, 2018).

Silva e Malheiros (2023) aplicaram uma proposta de trabalho com tecnologias digitais no contexto da Educação Matemática com Jovens e Adultos, tendo em vista criar oportunidades de ensino e aprendizagem. Os resultados do estudo revelam que foram usadas diferentes tecnologias (smartphones, internet e aplicativos), tanto por educadores como por educandos, as quais favoreceram a criação de um ambiente de investigação matemática e em que a produção do conhecimento matemático resulta do coletivo "educadores-educandos-tecnologia".

De entre as variadas abordagens às tecnologias digitais, destacam-se os chamados *Ambientes Geométricos Dinâmicos*, que se caracterizam por permitirem, rapidamente, gerar variados exemplos de um conceito, formular e refutar conjecturas e proporcionar um feedback imediato. No caso do GeoGebra, que é o software que vai ser usado neste estudo, trata-se de um *Ambiente Geométrico Dinâmico* que, além da Geometria, também pode ser usado em Cálculo, Álgebra e Estatística.

As potencialidades do GeoGebra para o ensino da matemática, e em particular da Geometria, estão bem documentadas na muita literatura que tem sido publicada nesse âmbito. Por exemplo, para Freitas e Manfredo (2024), a utilização do GeoGebra no ensino da matemática promove um ambiente de aprendizagem dinâmico que favorece a visualização e manipulação de objetos geométricos, a elaboração de conjecturas e a exploração de conceitos geométricos. Mais concretamente, em Fernandes (2022) estudam-se operações com números positivos, em Fernandes (2023a) realiza-se o estudo dos quadriláteros enquanto conceitos geométricos e em Fernandes (2023b) explora-se uma investigação em Geometria.

Neste contexto, no presente estudo explora-se o Teorema de Pitágoras e várias generalizações envolvendo esse teorema, recorrendo ao GeoGebra e a processos analíticos. Para tal, estabeleceram-se os dois seguintes objetivos na exploração das tarefas propostas: 1) discutir as potencialidades do uso do GeoGebra; e 2) analisar a dimensão matemática desenvolvida.

Apos a introdução, em que se estabeleceu e justificou a problemática do estudo, desenvolve-se a secção de referencial teórico, centrada no Teorema de Pitágoras e no GeoGebra, e continua-se com as secções de método e de exploração das generalizações envolvendo o teorema de Pitágoras. Por fim, na secção de conclusão e implicações sintetizam-se os resultados obtidos e extraem-se implicações do estudo realizado.

REFERENCIAL TEÓRICO

No referencial teórico iremos abordar o Teorema de Pitágoras e o uso do GeoGebra como *Ambiente Geométrico Dinâmico*.

O Teorema de Pitágoras afirma que, num triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, constituindo, portanto, uma propriedade dos triângulos retângulos.

Como justificação do nome Teorema de Pitágoras, sugeriu-se que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração do teorema, mas essa conjectura não é possível comprová-la (BOYER, 1986). Mais tarde, Euclides incluiu uma demonstração do teorema no Livro I dos Elementos.

Por outro lado, o GeoGebra pode ser considerado um programa computacional dinâmico que pode ser aplicado em várias áreas da matemática, como seja o Cálculo, a Álgebra, a Geometria e a Estatística. No presente estudo focamo-nos, fundamentalmente, no tema de Geometria, em que o GeoGebra é usado como um *Ambiente Geométrico*

Dinâmico (AGD). Em geral, no caso da Geometria, o uso do GeoGebra desenvolve-se a partir da construção de uma figura geométrica que incorpora os pressupostos da propriedade, do conceito, da definição ou da situação-problema que se pretende mostrar ou resolver. Para Junqueira (1996),

> Uma construção feita num AGD, visualizada no ecrã de um computador, representa uma figura geométrica definida pelo conjunto de propriedades e relações que se conservam invariantes através da manipulação. Na medida em que através dessas construções é possível, por exemplo, visualizar figuras quaisquer, elas adquirem um estatuto diferente das construções feitas em papel com régua e compasso. (p. 70).

Construída a figura geométrica, é possível manipulá-la a partir de objetos específicos no monitor do computador, permitindo aos professores e alunos considerar a figura como sendo representativa de uma classe de objetos ou de construções que mantêm invariantes as propriedades que as caracterizam. Deste modo, podemos considerar que essas figuras geométricas incorporam alguma generalização, isto é, que são generalizáveis.

Por outro lado, para manipular uma figura geométrica deve ter-se em conta que na construção dessa figura estabelece-se uma hierarquia nos seus objetos constituintes, que posteriormente se traduz na dependência ou não de outros objetos. Assim, podemos falar de objetos *livres*, a partir dos quais podemos manipular a figura geométrica e obter novos exemplos, ou objetos *fixos*, que não permitem manipular a figura geométrica e, portanto, nem obter novos exemplos.

No processo de manipulação de uma figura, que advém do arrastamento de objetos específicos, é fundamental manter a invariância das propriedades que a caracterizam, ou seja, assegurar que as figuras geométricas obtidas por esse processo sejam do mesmo tipo. Tais figuras, por oposição àquelas que se *desmancham*, são designadas por figuras *resistentes* (JUNQUEIRA, 1996), as quais são da maior importância no estudo da matemática, e também da Geometria em particular. Essas figuras resistentes, porque preservam as propriedades das figuras, permitem gerar exemplos, tantos quantos os necessários, os quais, por sua vez, permitem a descoberta de conjecturas e mesmo de possíveis caminhos para validar propriedades observadas.

Em geral, trata-se, portanto, de formular conjecturas e de obter pistas acerca do processo de validação de propriedades, pois, quase sempre, a sua prova está fora das possibilidades do GeoGebra. Embora os muitos exemplos gerados pelo GeoGebra permitam provar propriedades que envolvem um número finito e reduzido de instanciações, quase sempre, as propriedades matemáticas tratam de generalizações que envolvem um número infinito de instanciações, o que torna impraticável a análise de tal quantidade de exemplos.

Em vários estudos anteriores, os autores mostraram os aspectos positivos do uso do software GeoGebra no estudo de vários conceitos e propriedades matemáticas. Especificamente, Fernandes (2022) explorou as potencialidades da sua utilização em operar com números positivos recorrendo a representações geométricas com o GeoGebra, incluindo a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a raiz quadrada de números positivos. Adicionalmente, aplicaram-se algumas delas à representação gráfica de funções restringidas aos números não negativos ou positivos, designadamente a função $f(a) = a^2$ (operação de multiplicação), definida no conjunto dos números reais não negativos, $f(a) = 1/a$ (operação de divisão), definida no conjunto dos números reais positivos e $f(a) = \sqrt{a}$ (operação de raiz quadrada), definida no conjunto dos números reais não negativos. Depois de verificar a diversidade de objetos matemáticos envolvidos nas operações, à luz da categorização de Godino, Batanero e Font (2007), e as relações entre as operações, o autor afirma que se trata de

> aspetos educacionais muito relevantes ao permitir ao aluno rever, consolidar e relacionar tais objetos, contribuindo, portanto, para uma aprendizagem mais significativa e profunda (AUSUBEL; NOVAK; HENISIAN, 1980). Complementarmente, as conexões entre as operações favorecem a retenção e a evocação desses objetos matemáticos (NOVAK; GOWIN, 1996)" (FERNANDES, 2022, p. 89).

Posteriormente, Fernandes (2023a) desenvolveu um estudo sobre quadriláteros enquanto conceitos geométricos, com recurso ao GeoGebra. Concretamente, o autor estudou os elementos de conceitos geométricos ─ nome, atributos essenciais, atributos não essenciais, exemplos positivos, exemplos negativos e rega ou definição (JOYCE; WEIL, 1996) ─ de alguns quadriláteros a partir da sua construção com o GeoGebra. Segundo o autor, a análise do processo de construção dos quadriláteros no GeoGebra levou-o a concluir que os principais elementos dos respetivos conceitos se evidenciam nessa construção, salientando-se, principalmente, os atributos essenciais e não essenciais, os exemplos positivos e, portanto, explicitam-se os elementos que permitem estabelecer a regra (ou definição) do conceito respetivo.

Outro resultado importante do estudo consistiu na possibilidade de construir um mesmo quadrilátero envolvendo atributos essenciais distintos e uma regra (ou definição) do conceito também distinta, o que permite aos alunos aprofundarem os seus conhecimentos acerca dos quadriláteros (SKEMP, 1993).

Num terceiro estudo de Fernandes (2023b) explorou-se com o GeoGebra uma investigação em Geometria. Especificamente, estuda-se a possibilidade de construir e caracterizar o *bissetogramo*[1] nos diferentes tipos de quadriláteros. Para o autor, ficou patente no estudo que a natureza dinâmica do GeoGebra, ao permitir produzir rapidamente muitos exemplos através do arrastamento de objetos livres da figura, possibilitou gerar conjecturas que depois foram, eventualmente, confirmadas por processos analíticos. Estes resultados foram especialmente observados no estudo dos tipos de quadriláteros em que é possível definir o *bissetogramo*, na caracterização dos *bissetogramos* e na verificação do *bissetogramo* como quadrilátero inscritível numa circunferência.

Por fim, no caso do Teorema de Pitágoras, Moreira et al. (2023) realizaram uma intervenção didática em que participaram alunos do 8.º ano de Cabo Verde. No final da intervenção, os autores afirmaram que "ficou evidente que o software GeoGebra é uma ferramenta auxiliar no ensino do Teorema de Pitágoras, [… pois] os alunos conseguiram realizar suas próprias interpretações e reflexões nas suas próprias visualizações e respostas encontradas por eles mesmos" (p. 35).

MÉTODO

No presente estudo explora-se o Teorema de Pitágoras e generalizações envolvendo esse teorema, numa vertente experimental, recorrendo ao GeoGebra, e analítica, a partir dos dois objetivos: 1) discutir as potencialidades do uso do GeoGebra; e 2) analisar a dimensão matemática desenvolvida.

---

[1] O *bissetogramo* é o quadrilátero definido pelas bissetrizes dos ângulos internos de um dado quadrilátero. Trata-se, portanto, de um novo quadrilátero que nem é sempre é possível construir em qualquer tipo de quadrilátero dado.

O estudo enquadra-se no paradigma qualitativo e assume uma vertente teórica (MCMILLAN; SCHUMACHER, 2014). Seguindo esta perspetiva, no desenvolvimento do estudo, são exploradas proposições sobre o Teorema de Pitágoras e generalizações envolvendo esse teorema.

Na exploração das proposições, começa-se por construir figuras geométricas no GeoGebra, geram-se exemplificações dessas construções resistentes, observam-se invariantes e formulam-se possíveis conjecturas, o que consiste na abordagem experimental das proposições em estudo. Seguidamente, na abordagem analítica, validam-se as propriedades antes inferidas.

Na sequencialização das proposições em estudo, começa-se com o Teorema de Pitágoras, prossegue-se com o estudo das generalizações obtidas a partir de polígonos regulares e termina-se com o estudo das generalizações obtidas a partir de polígonos semelhantes.

GENERALIZAÇÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta secção consideram-se três subsecções: na primeira estuda-se o Teorema de Pitágoras; na segunda analisam-se generalizações obtidas a partir de polígonos regulares; e na terceira analisam-se generalizações obtidas a partir de polígonos semelhantes.

O TEOREMA DE PITÁGORAS

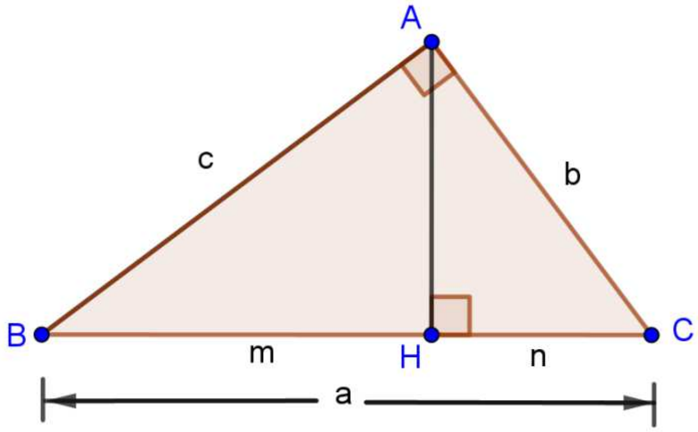
O teorema de Pitágoras, cuja formulação remonta ao século VI a. C., estabelece-se, de forma abreviada, através do seguinte enunciado: ─ *Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*. Esta formulação do teorema assume uma interpretação geométrico-algébrica e para demonstrá-lo vamos considerar um triângulo retângulo e nele definir a altura relativa à hipotenusa, como se mostra na Figura 1.

Depois de definido o triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, construiu-se a sua altura $[AH]$ relativa à hipotenusa, ficando o seu comprimento a dividido em dois segmentos de reta de comprimento m e n.

Note-se que a altura $[AH]$ dividiu o triângulo retângulo $[ABC]$ em dois triângulos, $[ABH]$ e $[AHC]$, que são semelhantes entre si e ao triângulo inicial $[ABC]$. Do triângulo $[ABC]$ ser semelhante ao triângulo $[ABH]$, deduz-se que $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow am = c^2$.

Analogamente, do triângulo $[ABC]$ ser semelhante ao triângulo $[AHC]$, deduz-se que $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Leftrightarrow an = b^2$.

Figura 1 — Interpretação geométrico-algébrica do teorema de Pitágoras.



Fonte: elaboração do autor.

Adicionando, ordenadamente, as igualdades antes obtidas, vem: $am + an = c^2 + b^2 \Leftrightarrow a(m+n) = c^2 + b^2$. Substituindo na igualdade a expressão $m + n$ por a $(m + n = a)$, obtém-se a relação pretendida, $a^2 = b^2 + c^2$.

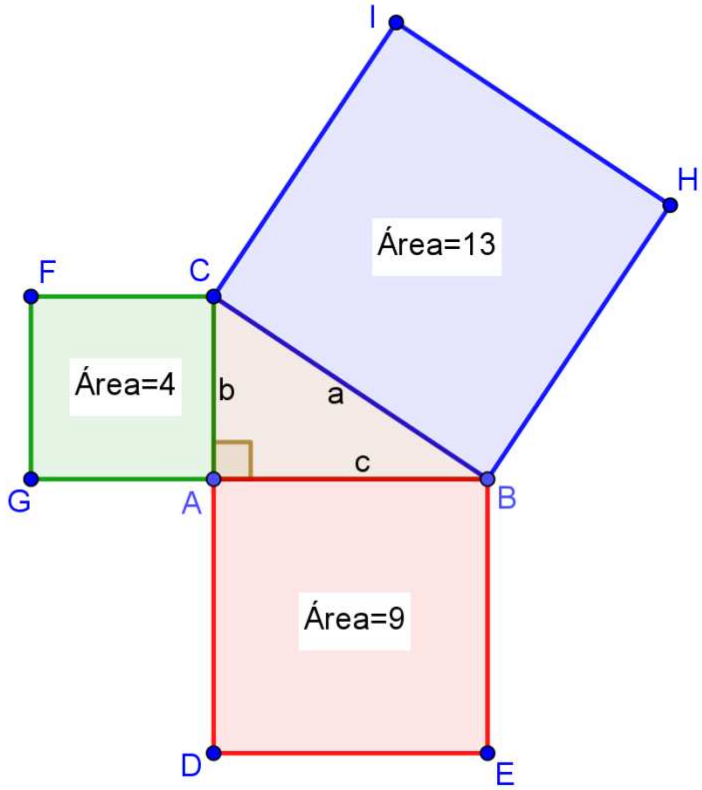
Esta demonstração do teorema é frequentemente usada nos livros didáticos e é diferente daquela que aparece no Livro I dos Elementos de Euclides (BOYER, 1986).

GENERALIZAÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE POLÍGONOS REGULARES

Nas generalizações que vamos estudar seguidamente consideraremos em cada lado do triângulo retângulo o mesmo polígono regular, para verificar se a área do polígono regular construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos mesmos polígonos regulares construídos sobre os catetos. Vamos começar pelo caso do quadrado, que se apresenta na Figura 2.

Uma vez definido o triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, construíram-se os três quadrados de comprimentos de lados iguais aos respetivos lados do triângulo. Determinando agora as áreas dos quadrados, verifica-se que a área do quadrado relativo à hipotenusa (13) é igual à soma das áreas dos quadrados relativos aos catetos $(4 + 9)$. Para além do exemplo da Figura 2, ao arrastar vértices livres do triângulo $[ABC]$ constata-se que também nesses exemplos se mantém a relação, sugerindo que se trata de uma relação verdadeira.

Figura 2 ─ Generalização estudada a partir de quadrados.

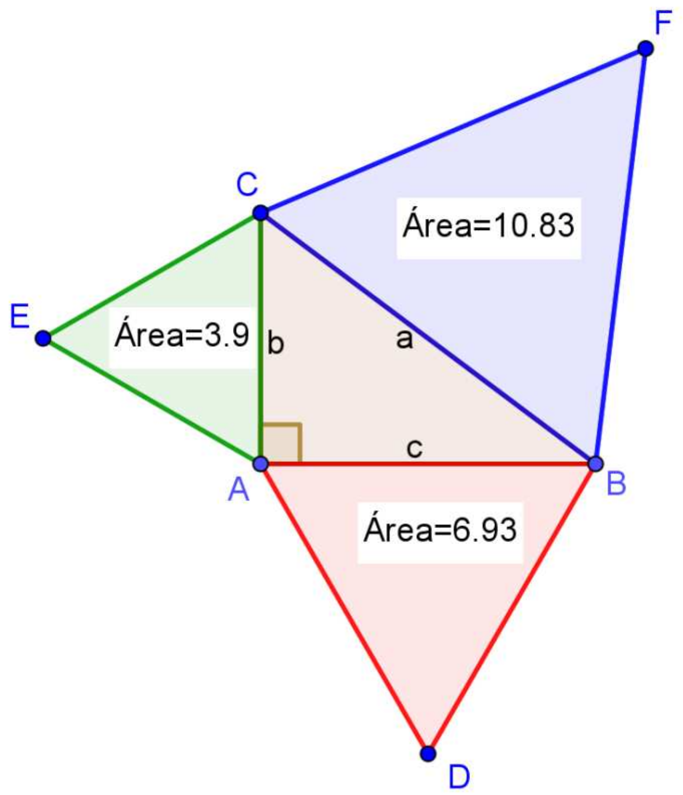


Fonte: elaboração do autor.

Sendo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa dada por a^2 e as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos dadas por b^2 e c^2, atendendo ao teorema de Pitágoras, conclui-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Mostramos, assim, que: ─ *Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos*. Simultaneamente, esta generalização pode ser vista como uma interpretação geométrica do teorema de Pitágoras, cuja formulação, frequentemente, aparece nos livros didáticos.

Sendo o quadrado um polígono regular, é natural questionarmo-nos sobre se o mesmo acontece para qualquer outro polígono regular. Com o objetivo de testar esta questão, vamos agora considerar triângulos equiláteros contruídos sobre cada um dos lados do triângulo retângulo e verificar se área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos. Na Figura 3 está registada a verificação da generalização enunciada recorrendo à construção de triângulos equiláteros em cada um dos lados do triângulo retângulo.

Figura 3 ─ Generalização estudada a partir de triângulos equiláteros.



Fonte: elaboração do autor.

Depois de definido o triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, construíram-se os três triângulos equiláteros referentes a cada um dos lados do triângulo retângulo. Seguidamente determinou-se a área de cada um dos triângulos equiláteros construídos, verificando-se que a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa $(10{,}83)$ é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos $(3{,}9 + 6{,}93)$, confirmando-se, portanto, a generalização formulada.

Para além do exemplo apresentado na Figura 3, facilmente podem ser gerados outros exemplos, bastando, para tal, arrastar vértices livres do triângulo retângulo $[ABC]$. Estes exemplos, ao confirmarem a generalização, obviamente, aumentam a nossa convicção de que realmente ela é válida também para o caso do triângulo equilátero e aumentam o nosso interesse em realizar uma prova analítica dessa validade.

Para tal, observando a Figura 3, pode-se determinar a área de cada um dos triângulos equiláteros construídos sobre cada um dos lados do triângulo retângulo inicial, obtendo-se:

— Área do triângulo relativo ao lado a: $A_a = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$;

— Área do triângulo relativo ao lado b: $A_b = b^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$;

— Área do triângulo relativo ao lado c: $A_c = c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Adicionando as áreas relativas aos triângulos equiláteros relativos aos catetos b e c, tem-se: $A_b + A_c = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + c^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$. Considerando que o triângulo $[ABC]$ é retângulo, verifica-se que $a^2 = b^2 + c^2$; donde, substituindo $b^2 + c^2$ por a^2 na expressão anterior, conclui-se que $A_b + A_c = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, que é precisamente a área do triângulo equilátero relativo à hipotenusa, ou seja, $A_b + A_c = A_a$.

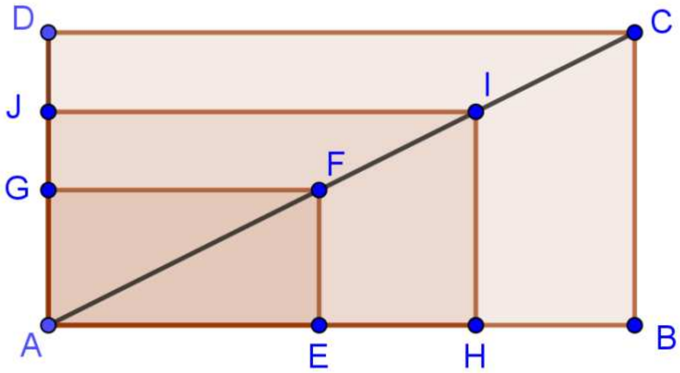
O raciocínio antes desenvolvido para o caso dos quadrados e dos triângulos equiláteros pode ser desenvolvido para o caso de outros polígonos regulares (pentágono, hexágono, …), permitindo chegar-se à mesma conclusão. Assim, generalizando novamente, pode dizer-se que: — *A área de um polígono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos mesmos polígonos regulares construídos sobre os catetos*.

GENERALIZAÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE POLÍGONOS SEMELHANTES

Nesta subsecção vamos construir sobre cada um dos lados do triângulo retângulo polígonos semelhantes, tendo em vista verificar se a área do polígono construído sobre a hipotenusa ainda é igual à soma das áreas dos polígonos semelhantes contruídos sobre os catetos. Ora, em geral, para construir polígonos semelhantes deve-se ter em conta que os polígonos semelhantes devem ter os ângulos congruentes e os comprimentos dos lados proporcionais.

Para estudar a existência de tal relação, vamos começar por considerar retângulos (não quadrados) semelhantes sobre cada lado do triângulo retângulo inicial. No caso dos retângulos, podemos recorrer a um procedimento particular para construir retângulos semelhantes, como se ilustra na Figura 4.

Figura 4 — Construção de retângulos semelhantes.



Fonte: elaboração do autor.

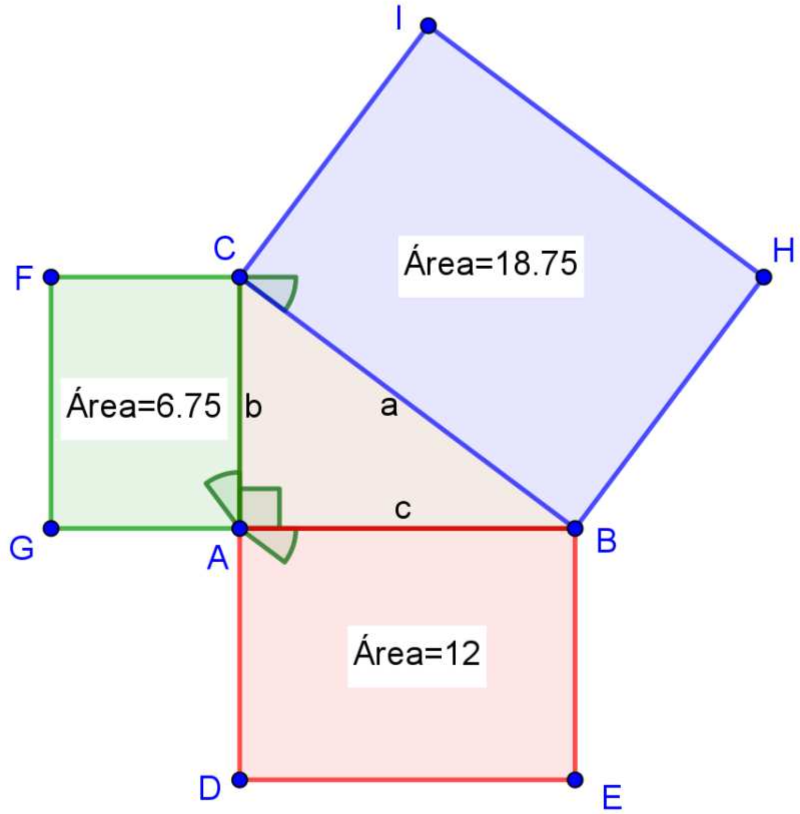
Depois de construído o retângulo $[ABCD]$, defina-se uma das suas diagonais, neste caso definiu-se a diagonal $[AC]$. De seguida, considerando qualquer ponto sobre a diagonal $[AC]$, distinto de A e C, pode-se, facilmente, definir qualquer retângulo semelhante ao retângulo dado $[ABCD]$, bastando, para isso, conduzir pelo ponto considerado segmentos de reta paralelos (ou perpendiculares) aos lados do retângulo inicial. Assim, no caso do ponto F, obtém-se o retângulo $[AEFG]$ e, no caso do ponto I, obtém-se o retângulo $[AHIJ]$, que são ambos semelhantes ao retângulo inicial dado.

Portanto, na construção dos retângulos semelhantes sobre cada um dos lados do triângulo retângulo, começamos por construir sobre um dos lados do triângulo um retângulo e, seguidamente, construímos os outros dois retângulos, correspondentes aos restantes lados do triângulo, de modo que sejam semelhantes àquele que foi construído antes. Para garantir essa semelhança, basta manter constante, em qualquer dos dois retângulos, a amplitude do ângulo da diagonal com um dos lados do primeiro retângulo nos outros dois retângulos. Na Figura 5 regista-se a construção dos três retângulos semelhantes.

Uma vez definido o triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, construiu-se o retângulo relativo ao cateto c, isto é, o retângulo $[ADEB]$, em que o lado $[AB]$ tem de comprimento c e o lado $[AD]$ tem um comprimento qualquer.

Seguidamente, definiu-se o $\angle EAB$ no retângulo $[ADEB]$, e posteriormente definiram-se ângulos congruentes a esse ângulo a partir do cateto $[AC]$ e da hipotenusa $[BC]$. Dessa forma, definiram-se os outros dois retângulos, $[ACFG]$ sobre o cateto b e $[CBHI]$ sobre a hipotenusa a.

Figura 5 ─ Generalização estudada a partir de retângulos semelhantes.



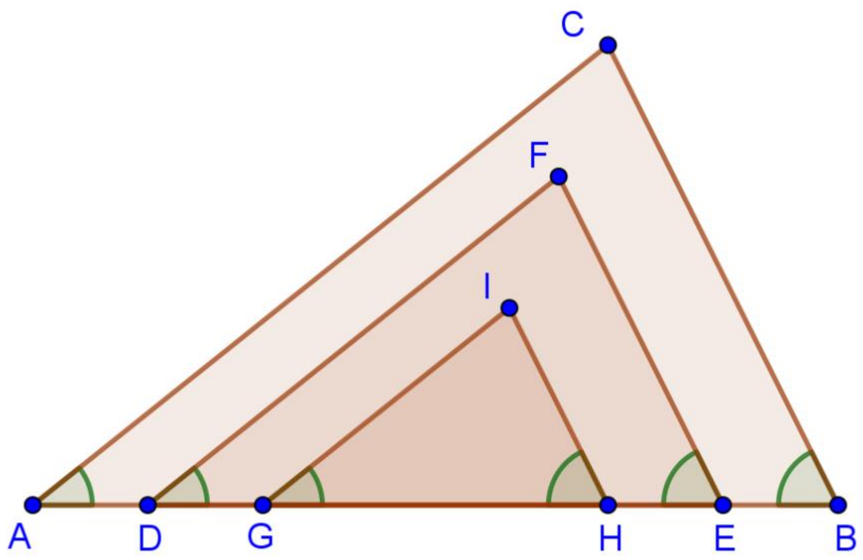
Fonte: elaboração do autor.

Por fim, determinando as áreas de cada um dos retângulos semelhantes, conclui-se que a área do retângulo construído sobre a hipotenusa $(18{,}75)$ é igual à soma das áreas dos retângulos semelhantes construídos sobre os catetos $(6{,}75 + 12)$. Para além do exemplo da Figura 5, ao arrastar vértices livres do triângulo retângulo $[ABC]$ constata-se que também nesses exemplos se mantém a generalização, sugerindo que se trata de uma relação verdadeira.

Consideremos, por último, o caso de triângulos (não equiláteros) semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo, para verificar se a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os catetos.

Tal como no caso dos retângulos, também nos triângulos podemos recorrer a um procedimento particular para construir triângulos semelhantes. Neste caso basta impor a congruência de dois ângulos internos dos triângulos para que eles sejam semelhantes, o que resulta do facto do triângulo ser uma estrutura rígida. Daí resulta que se dois ângulos são congruentes, o terceiro também é congruente. Na Figura 6 ilustra-se a construção de triângulos semelhantes.

Figura 6 ─ Construção de triângulos semelhantes.



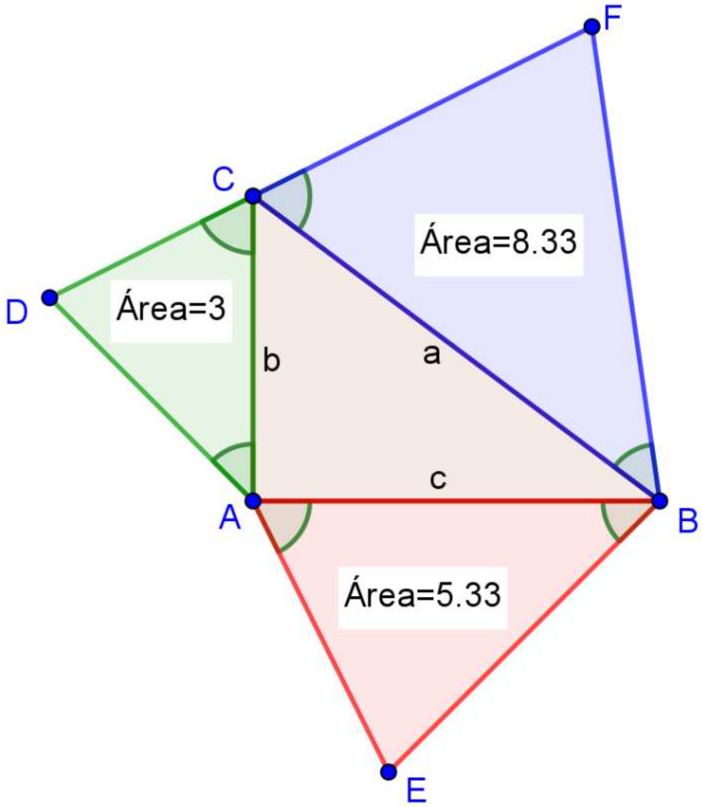
Fonte: elaboração do autor.

Na construção de triângulos semelhantes, começamos por construir um triângulo $[ABC]$ qualquer, para depois construir os triângulos que lhe sejam semelhantes. Neste caso, os triângulos $[DEF]$ e $[GHI]$ são semelhantes ao triângulo $[ABC]$ porque têm dois ângulos internos congruentes: no triângulo $[DEF]$, $\angle A \cong \angle D$ e $\angle B \cong \angle E$; no triângulo $[GHI]$, $\angle A \cong \angle G$ e $\angle B \cong \angle H$ (recorde-se que os triângulos ao terem dois ângulos congruentes, o terceiro também é congruente). Na Figura 7 regista-se a construção dos três triângulos semelhantes.

Depois de definido o triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, construiu-se o triângulo relativo ao cateto b, isto é, o triângulo $[ACD]$, em que o lado $[AC]$ tem de comprimento b e os lados $[AD]$ e $[CD]$ têm comprimentos quaisquer, embora condicionados pela possibilidade de construir o triângulo.

Posteriormente, definiram-se os ângulos $\angle CAD$ e $\angle DCA$ no triângulo $[ACD]$, e seguidamente definiram-se ângulos congruentes a esses ângulos a partir do cateto $[AB]$ e da hipotenusa $[BC]$. Dessa forma, definiram-se os outros dois triângulos, $[AEB]$ sobre o cateto c e $[BFC]$ sobre a hipotenusa a.

Figura 7 ─ Generalização estudada a partir de triângulos semelhantes.



Fonte: elaboração do autor.

Por fim, determinando as áreas de cada um dos retângulos semelhantes, conclui-se que a área do triângulo construído sobre a hipotenusa $(8{,}33)$ é igual à soma das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os catetos $(3 + 5{,}33)$. Para além do exemplo da Figura 7, ao arrastar vértices livres do triângulo retângulo $[ABC]$ constata-se que também nesses exemplos se mantém a generalização, sugerindo que se trata de uma relação verdadeira.

Em termos analíticos, recordando que, em dois polígonos semelhantes, a área de um deles é o produto da área do outro pelo quadrado da razão de semelhança que transforma este último no primeiro e designando por A_a, A_b e A_c as áreas dos polígonos relativos aos lados do triângulo retângulo, tem-se: $A_b = \frac{b^2}{a^2}A_a$ e $A_c = \frac{c^2}{a^2}A_a$. Adicionando as áreas A_b e A_c , vem: $A_b + A_c = \frac{b^2}{a^2}A_a + \frac{c^2}{a^2}A_a = \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)A_a = \frac{b^2+c^2}{a^2}A_a$. Substituindo nesta última expressão $b^2 + c^2$ por a^2, conclui-se que $A_b + A_c = \frac{a^2}{a^2}A_a = A_a$. Logo, pode dizer-se que: ─ *Em polígonos semelhantes,* a *área do polígono* *construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos*.

Deve notar-se que esta conclusão generaliza o que antes foi dito para o caso dos polígonos regulares, uma vez que os polígonos regulares também são semelhantes. Donde, as conclusões referidas a respeito de polígonos semelhantes também se aplicam aos polígonos regulares.

CONCLUSÃO E IMPLICAÇÕES

No presente artigo estudam-se generalizações envolvendo o Teorema de Pitágoras, tendo-se estabelecido os dois seguintes objetivos na exploração das tarefas propostas: 1) analisar as potencialidades do uso do GeoGebra; e 2) estudar a dimensão matemática desenvolvida.

No que concerne ao uso do GeoGebra, que operacionaliza a abordagem experimental, constata-se que as potencialidades mencionadas desse recurso na fundamentação teórica estão bem presentes na resolução das tarefas, principalmente no que respeita à criação e análise de exemplos. Concretamente, foram criados exemplos resistentes que podiam facilmente gerar outros exemplos através do arrastamento de pontos livres da figura, concretizando, portanto, a natureza dinâmica do GeoGebra (FREITAS; MANFREDO, 2024). Ora, a exploração e análise desses exemplos possibilitou a formulação de conjecturas, passíveis de posteriormente serem validadas por processos analíticos.

Em relação à dimensão matemática, são variados os objetos matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) presentes na resolução das tarefas, designadamente: situações-problema; linguagens; conceitos, definições e proposições; procedimentos e argumentos. No caso das situações-problema, destacam-se tarefas de natureza aberta e de carácter investigativo; nas linguagens, salientam-se as linguagens verbal, simbólica e do GeoGebra; nos conceitos, definições e proposições, evidencia-se a sua variedade; nos procedimentos, evidenciam-se os cálculos e algoritmos; e nos argumentos, enfatiza-se a prova matemática.

Os conceitos, definições e proposições referem-se ao Teorema de Pitágoras, polígonos regulares, polígonos semelhantes, propriedades dos polígonos regulares, propriedades dos polígonos semelhantes, construção de polígonos regulares e semelhantes e área de um polígono. Ora, tal variedade de objetos matemáticos e possíveis relações entre eles promovem uma aprendizagem mais profunda dos alunos (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; NOVAK; GOWIN, 1996; SKEMP, 1993).

Os procedimentos estão presentes em todo o processo de resolução das tarefas: na abordagem experimental, destaca-se o uso de ferramentas do GeoGebra; na abordagem analítica, distinguem-se operações numéricas e algébricas.

Por fim, na argumentação, evidencia-se a prova matemática das generalizações por processos analíticos. Nessas generalizações, envolvendo um número infinito de instanciações, não é possível gerar todos os exemplos no GeoGebra e, de seguida, testá-los. Tal limitação, que é característica de qualquer outro software (FERNANDES; VAZ, 1998), implica que o GeoGebra só possa ser usado como meio de prova em generalizações que envolvam um número finito e relativamente pequeno de exemplos ou para refutar proposições através de um contraexemplo.

Do facto de as generalizações aqui estudadas envolverem uma grande diversidade de objetos matemáticos e relações existentes entre eles, resulta que tais tarefas são muito adequadas para sintetizar aprendizagens anteriores, que podem ser realizadas durante um tempo mais alargado. Assim, sugere-se que as tarefas exploradas no presente estudo possam ser propostas a alunos do 8.º ano de escolaridade, que é o ano em que é introduzido o Teorema de Pitágoras (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÂO, 2021), ou num ano escolar subsequente, eventualmente, na forma de trabalho de projeto desenvolvido em pequenos grupos.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BOYER, C. B. **Historia de la matemática**. Madrid: Alianza Universidad, 1986.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular ─** Educação é a Base. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

FERNANDES, J. A. Estudo dos quadriláteros enquanto conceitos geométricos com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 37-53, 2023a.

FERNANDES, J. A. Explorar com o GeoGebra uma investigação em Geometria. **Em Teia ─ Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 14, n. 3, p. 1-19, 2023b.

FERNANDES, J. A. Operar com números positivos no GeoGebra: implicações didáticas. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 72–91, 2022.

FERNANDES, J. A.; VAZ, O. Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, Lisboa, 39, p. 43-55, 1998.

FREITAS, C.; MANFREDO, E. C. G. Revisão integrativa sobre o Geogebra em pesquisas de Educação Matemática: onde estão os anos iniciais? **Em Teia ─ Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 15, n. 1, 2024.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Berlim, v. 39, n. 1-2, p. 127- 135, 2007.

JOYCE, B.; WEIL, M. **Models of teaching**. Boston: Allyn and Bacon, 1996.

JUNQUEIRA, M. Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. **Quadrante**, Lisboa, v. 5, n. 1, p. 61-108 1996.

MCMILLAN, J.; SCHUMACHER, S. Research in education: evidence-based inquiry. 7. ed. Harlow: Person, 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Secundário. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2023.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Básico. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2021.

MOREIRA, I. et al. Teorema de Pitágoras com recurso ao software GeoGebra e GeoGebra Classroom. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 17-36, 2023.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: Autor, 2000.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Aprender a aprender**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

SILVA, J. N. D.; MALHEIROS, A. P. S. Tecnologias digitais na educação matemática com jovens e adultos. **Em Teia ─ Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 14, n. 1, p. 247-261, 2023.

SKEMP, R. R. **The psychology of learning mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

Submetido em 15/03/2024.

Aprovado em 15/09/2024.