ISSN 2177 - 9309 https://doi.org/10.51359/2177-9309.2024.262996

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

PERÍMETRO E ÁREA: UM EXPERIMENTO DE ENSINO PARA ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Perimeter and Area: a teaching experiment for High School students using problem solving

José Cícero dos Santos
Doutor em Educação Matemática
Universidade de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
jose.csantos@upe.br
https://orcid.org/0009-0001-0874-8772

Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica
Universidade de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
anderson.rodriguessilva@upe.br
https://orcid.org/0009-0006-8950-3019

Resumo

Neste trabalho apresentamos um recorte da pesquisa Santos (2021), cujo objetivo foi investigar se o ensino pautado nos pressupostos da metodologia de ensino resolução de problemas favorece a construção, o aprofundamento e a ampliação da aprendizagem de perímetro e área. Para perseguir os objetivos foi proposto para um grupo de estudantes do 3.º ano do Ensino Médio que resolvessem uma sequência de cinco problemas, com características dos propostos em avaliações de larga escala. Para analisar as respostas dos estudantes, buscou-se apoio nos pressupostos teóricos da resolução de problemas de Polya (1976), Mason, Burton e Stacey (1982) e na perspectiva da mudança e jogo de quadros de Douady (1992). Os resultados apontaram dificuldades de interpretação dos estudantes com os conceitos de perímetro e área. Também, apresentaram indícios de dificuldades para utilizar números para associar à medida da grandeza numa dada unidade, por exemplo, cm ao perímetro e cm² a área. Considerando que a natureza dos problemas contemplou a inter-relação de conceitos que poderiam pertencer a duas ou mais habilidades, inferimos que os resultados denotaram falta de habilidade dos estudantes para trabalharem com a resolução de problemas.

Palavras-Chave: Ensino Médio; resolução de problemas; perímetro e área.

Abstract

In this study, we present an excerpt from the research by Santos (2021), which aimed to investigate whether teaching based on the principles of the problem-solving methodology fosters the construction, deepening, and expansion of learning related to perimeter and area. To achieve these objectives, a group of 12th-grade high school students was asked to solve a sequence of five problems with characteristics similar to those proposed in large-scale assessments. To analyze the students' responses, we relied on the theoretical foundations of problem-solving by Polya (1976), Mason, Burton, and Stacey (1982), as well as Douady's (1992) perspective on frame change and frame play. The results indicated that students faced difficulties interpreting the concepts of perimeter and area. They also showed evidence of struggles in using numbers to associate measurements with their respective units, such as centimeters for perimeter (cm) and square centimeters for area (cm²). Considering that the nature of the problems involved the interrelation of concepts spanning two or more skills, we infer that the results revealed a lack of proficiency among the students in working with problem-solving.

Keywords: High School; Problem solving; Perimeter and area.

INTRODUÇÃO

O ensino por meio da metodologia resolução de problemas é discutido na literatura considerando três perspectivas, das potencialidades para ensinar matemática, das descobertas em relação a aprendizagem quando se observa o processo de resolução de problemas e das políticas públicas desenvolvidas a partir do baixo desempenho dos estudantes em avaliações externas. Salienta-se que neste trabalho o nosso foco foi investigar as evidências de aprendizagens que emergiram durante o processo da resolução de problemas. Todavia, o contexto inicial desta pesquisa deu-se a partir dos resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), do ano de 2017, no que tange ao uso da resolução de problemas para avaliar a aprendizagem em matemática.

Neste sentido, ressalta-se que as escolas brasileiras passam por diversas avaliações em larga escala, as quais visam avaliar o conhecimento matemático dos estudantes quando concluem um dos ciclos da Educação Básica, por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a Avaliação de Aprendizagem em Processo do Estado de São Paulo (AAP) e o do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Considerando o resultado destas avaliações externas, conforme já supracitado, o contexto deste trabalho foi pautado nos resultados IDEB, que revelou dados preocupantes sobre a aprendizagem da matemática no âmbito nacional, estadual e municipal. Os relatórios do IDEB pontuaram baixo desempenho dos estudantes em resolução de problemas. Estes resultados têm causado impasses entre os professores e pesquisadores, especialmente em relação aos resultados dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, que são os mais baixos. Logo, as posições até aqui colocadas reiteram a necessidade de pesquisas que investiguem as habilidades dos estudantes em resolução de problemas e, consequentemente, também de conhecimentos matemáticos.

Em busca de respostas sobre o baixo desempenho dos estudantes em matemática, Santos (2021) investigou a estrutura das questões das provas do SARESP, da OBMEP, da AAP, do Enem e do Saeb. A investigação inicial de Santos (2021), revelou que as questões possuem características comuns, são apresentadas na perspectiva da resolução de problemas, os quais podem ser fechados ou abertos. O objetivo dos problemas é avaliar uma única habilidade ou descritor e não é verdade, pois a natureza dos problemas trabalha com a inter-relação de conceitos que podem pertencer a duas ou mais habilidades.

Analisou-se que por muitas vezes a estrutura do problema inicia-se de maneira escrita e para complementar a natureza do problema é utilizado um quadro geométrico e que para o aluno resolvê-lo precisa transitar por dois quadros ou mais, por exemplo, o das grandezas, , o numérico e o algébrico, ou seja, precisam reformular o problema dentro de outros quadros para obter uma estratégia de resolução.

A partir da investigação da estrutura das questões, analisou também os relatórios de aprendizagem da prova do SARESP e do Saeb, referente aos resultados de 2017. O intuito foi analisar em quais habilidades os estudantes do Ensino Médio apresentaram menor índice de aprendizagens, nestes documentos verificou-se que as habilidades que envolviam álgebra, grandezas e medidas, apresentaram menor nível de aprendizagem.

Em busca de respostas em relação ao baixo nível de aprendizagem dos estudantes em álgebra, grandezas e medidas, Santos (2021) investigou estas dificuldades em sua pesquisa em duas fases, a primeira de cunho diagnóstico e a segunda foi uma intervenção. Em ambas as fases foram aplicados um conjunto de problemas, para um grupo de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública do estado de São Paulo. Os problemas aplicados possuíam características comuns aos propostos em avaliações de larga escala, alguns adotados de avaliações externas e outros elaborados pelos autores.

A primeira fase da pesquisa teve como objetivo diagnosticar conhecimentos, heurísticas e estratégias de estudantes do Ensino Médio relativos a perímetro, área, equação e funções por meio da resolução de problemas. Os resultados desta primeira fase mostraram que os estudantes apresentaram diferentes heurísticas, ligadas a diferentes quadros, para resolverem o mesmo problema. As heurísticas apresentadas nas soluções evidenciaram que o contexto do problema não causou dificuldades de interpretação e não interferiu na mobilização de estratégias, mas a natureza dos problemas foi o que causou mais dificuldades ao pensar matemático dos estudantes, o trabalho com a inter-relação conceitual das habilidades envolvidas no problema, a necessidade de desenvolver raciocínio em outro quadro, parece ter sido um obstáculo na resolução de problemas nesta primeira fase.

Os resultados da primeira fase levaram Santos (2021) a refletir que a resolução de problemas não deve ficar restrita a atividades individuais, cabe ir além, buscar promover, dentre outros aspectos, um ambiente de interação entre estudantes e professor, para que as resoluções desenvolvidas sejam analisadas e refletidas em um ambiente colaborativo em que todos fiquem à vontade para expor e justificar as suas heurísticas e compreender alguns fenômenos e resoluções de outros grupos de estudantes ou mesmo do próprio professor. Ações que foram implementadas na segunda fase da pesquisa, que é objetivo deste artigo, apresentar os resultados da fase da intervenção.

Na fase da intervenção, Santos (2021) investigou se o ensino pautado nos pressupostos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema (Allevato, Onuchic, 2014) favorece a construção, o aprofundamento e a ampliação da aprendizagem dos objetos matemáticos perímetro e área. Guiados por este objetivo, colocou-se duas questões norteadoras da pesquisa: "Um processo de ensino que promova reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes do Ensino Médio sobre a resolução de problemas que envolvem mudanças de quadros, geométrico, numérico e algébrico, pode favorecer a construção de conhecimentos dos estudantes sobre perímetro e área? Em caso positivo, quais são as contribuições?

Para analisar as respostas dos estudantes e responder as questões que nortearam esta pesquisa o suporte teórico adveio dos pressupostos da heurística de resolução de problemas de Polya (1976), Mason, Burton e Stacey (1982) e da perspectiva da mudança de quadro e jogo de quadros de Douady (1992).

QUADRO TEÓRICO DA PESQUISA: CONCEPÇÕES TEÓRICAS DA METODOLOGIA DE ENSINO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A metodologia de ensino resolução de problemas é uma teoria carregada de significados que potencializam o ensino e aprendizagem da matemática. Tendo em vista que muitos elementos desta teoria só emergem do trabalho prático na sala de aula, faz-se necessário que o professor conheça quais são, identifique suas características, para que assim possa avaliar os fenômenos emergentes do trabalho com esta metodologia. Assim, nesta seção, serão apontados e discutidos os principais elementos que sustentam a metodologia de ensino resolução de problemas.

Iniciemos com a heurística, que é constituída pelos caminhos, gestos, falas, ideias boas, descobertas e criatividade que podem surgir durante o desenvolvimento de uma estratégia. Polya (1976) defende que o raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, tendo por objetivo descobrir uma estratégia para resolver o problema que se apresenta. Por vezes, a estratégia é a representação de um plano de ação por meio de um modelo matemático. A estratégia pode ser reduzida, ampliada ou rejeitada, fatos que asseguram que a heurística é contínua no processo de resolução de problemas.

Segundo Barbedo (2017), a importância de investigar a utilização da heurística na resolução de problemas justifica-se pelo fato de ser um dos meios capazes de revelar resultados muito significativos sobre a forma do pensar matemático do sujeito. Para este autor, a resolução de um problema é um retrato que revela no papel as imagens mentais dos estudantes, ou seja, a materialização de um pensamento, que são importantes e decisivos para a reflexão dos professores, pois envolve o sucesso ou o fracasso do estudante durante a resolução de um problema.

No intuito de organizar o processo de resolução de problemas, Polya (1976) apresentou no livro "*How to solve it*", traduzido para o português como "A arte de resolver problemas", quatro etapas de resolução de problemas, que, segundo ele, um indivíduo deve passar para resolver um problema, são elas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Pautados nas perspectivas das etapas escritas por Polya (1976), os pesquisadores Mason, Burton e Stacey (1982), no livro "*Thinking Mathematically*", indicam três passos para resolver problemas, chamados por eles de “Entrada”, “Ataque” e “Revisão”. Estes autores reforçam a importância que deve ser dada por parte do professor às passagens de uma fase para outra e, também, considerar no trabalho com a resolução de problemas a especialização e a generalização.

Especialização significa pensar matematicamente, andando para trás, retomando conhecimentos antigos, fazendo analogias, recorrendo a problemas auxiliares, efetuando decomposições e recombinações para desenvolver conjecturas. Nesta fase, considera-se que o sujeito prepara o terreno para generalizar. Já a generalização, na matemática, significa investigar, por meio de um recurso semiótico as conjecturas desenvolvidas na fase de especialização. Nesta etapa de generalização as estratégias desenvolvidas na etapa de especialização podem ser abandonadas e novas estratégias podem ser desenvolvidas e validadas.

Segundo Mason, Burton e Stacey (1982), a entrada consiste na leitura, na interpretação e no desenvolvimento de estratégias. É a fase inicial, é o momento em que o indivíduo prepara o caminho e escolhe ferramentas matemáticas para serem utilizadas na ação. Nesta fase, os elementos utilizados para desenvolver a especialização são fortemente utilizados, por exemplo, as indagações “o que eu sei?”, “o que eu preciso?”, “o que eu posso introduzir?”, as analogias, a adoção de problemas auxiliares, a decomposição do problema ou a recombinação do problema são ações cognitivas inerente à fase de entrada, que podem colaborar para desenvolver uma ou mais estratégias para resolver o problema, neste caso, o ataque.

A fase do ataque, segundo Mason, Burton e Stacey (1982), é a principal para resolver os de problemas. Nesta fase, o estudante investiga as conjecturas desenvolvidas na fase de entrada, utilizando diferentes modelos matemáticos para verificar se elas são válidas. Espera-se que, no final desta fase, o estudante resolva o problema, convença a si mesmo e aos outros de que todas as ações cognitivas utilizadas no processo são verdadeiras. Esta fase envolve os elementos que compõem tanto a especialização quanto a generalização.

Na fase da revisão, espera-se que a ação do estudante seja a de olhar para trás para revisar o que fez, refletir sobre os pontos importantes do processo da resolução e ampliar as aprendizagens desenvolvidas para um contexto superior. Para Mason, Burton e Stacey (1982), refletir sobre todos os passos que antecedem o final da resolução de problemas é importante para o progresso do pensamento matemático. A transição de uma fase para outra transforma os sentimentos do estudante sobre o problema, os significados se inter-relacionam e o resultado desta alquimia é a aprendizagem significativa da matemática.

Outro elemento que está ligado ao processo da resolução de problemas é a rubrica, que são todas as escritas desenvolvidas durante a resolução. São as marcações no papel de uma heurística, os rabiscos para demarcar pontos notáveis em uma figura geométrica, gráfico ou tabela. Mason, Burton e Stacey (1982) consideram as rubricas um repertório de significados. Para estes autores, é a partir do hábito de anotar no papel as ideias, que surgem as fases de especialização e generalização. Estes autores interpretam a rubrica como se fosse um andaime, em torno do qual uma resolução é desenvolvida. Pode revelar elementos cognitivos essenciais para avaliar, ensinar e potencializar a aprendizagem da matemática quando ensinada via resolução de problemas.

CONCEPÇÕES TEÓRICAS DE RÉGINE DOUADY

Douady (1992) afirma que um quadro é constituído por objetos de um ramo da matemática, pelas relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diversas e pelas imagens mentais associadas aos objetos matemáticos. Na Educação Básica o ensino de matemática transita por vários quadros, podendo ocorrer no quadro da aritmética, no quadro algébrico, no quadro das grandezas, no quadro numérico ou no quadro das funções, dentre outros.

Segundo Douady (1992) o aluno trabalha com a mudança de quadros quando, de acordo com a natureza do problema, ele necessita de outro suporte cognitivo para obter visualizações diferentes do quadro inicial do problema, ou seja, a mudança de quadro é um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na formulação original.

Durante a resolução de um problema o aluno pode mudar constantemente suas estratégias, trabalhar com dois quadros paralelamente ou migrar para um novo quadro. Este processo de devir, que é inerente a resolução de problemas, é definido por Douady (1992) como jogos de quadros. Segundo ela, quaisquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas podem terminar em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares. Os jogos de quadros são vistos por Douady (1992) como meios privilegiados para provocar desequilíbrios cognitivos e permitir a ultrapassagem desses desequilíbrios em um novo equilíbrio, que ela chama de nível superior.

A partir da perspectiva de Douady (1992), sobre jogos de quadros, reforçamos a importância do ensino da matemática ser desenvolvido por meio da resolução de problemas, pois o antes, o durante e o depois da resolução de um problema, o processo em si, propiciam ao professor considerar os quadros auxiliares desenvolvidos pelo aluno, para fazer pontes com novos objetos matemáticos que se queira ensinar e promover a progressão da aprendizagem. Concordamos que o ensino sob esta perspectiva pode agregar significados valiosos para o aluno no que tange à aplicação real da matemática em diversas áreas do conhecimento humano e na própria matemática.

Sobre o ensino por meio da resolução de problemas, Douady (1992) reforça a importância que deve ser dada por parte do professor à dialética ferramenta-objeto. Segundo ela, em determinado momento certo conceito matemático é objeto de estudo e em outro ele é utilizado pelo aluno como suporte cognitivo para construir um novo conceito, ou seja, torna-se uma ferramenta. Nesta visão, Douady (1992) sugere que este processo, que ela chama de cíclico, deve ser analisado sob duas perspectivas: o uso de certo conceito matemático por parte do professor quando ensina e o uso de certo conceito matemático por parte do aluno quando está aprendendo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De natureza qualitativa, esta pesquisa foi realizada com base em características do *Design Experiment,* idealizado por Cobb *et al.* (2003). Identificamos nos pressupostos teóricos dessa metodologia fortes semelhanças com a estrutura da nossa pesquisa, como por exemplo, ela acentua seus pressupostos sobre como os alunos aprendem novos significados, os transformam e os aplicam. Assim, ela nos embasou para descrevermos os fenômenos que surgiram durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Segundo Cobb *et al.* (2003, p. 9, tradução nossa), uma pesquisa pautada nos objetivos do *Design Experiment* tem como resultado uma maior compreensão dos elementos utilizados para compor a ecologia de aprendizagem. Outrossim, o foco do investigador na perspectiva do *Design Experiment* deve estar no pensamento matemático dos participantes e nas possíveis modificações que poderão existir durante o processo de discussões e aprendizagem.

Esta pesquisa foi desenvolvida em duas fases, uma de cunho diagnóstico e a última foi uma intervenção. Na fase diagnóstica, o estudo foi realizado com um grupo de onze estudantes. Na fase da intervenção, o estudo foi realizado com um grupo de vinte estudantes. A coleta de dados foi realizada em uma escola pública no estado de São Paulo. Todos os estudantes eram do 3º ano do Ensino Médio. Os participantes tinham idades entre 15 e 18 anos, portanto foi seguido rigorosamente todos os protocolos da ética para pesquisa em seres humanos. Na fase diagnóstica, realizada no mês de junho do ano de 2021, o número de participante foi menor devido as restrições sanitárias causada pelo vírus SARS-CoV-2, o vírus que causa a Covid-19 e, em função da pandemia global causada por este vírus, o retorno dos estudantes ao ensino presencial não era obrigatório, ocorreu de forma parcial, os estudantes podendo optar por continuarem os estudos remotamente. Optamos em aplicar de maneira presencial, condição que dificultou a presença dos vinte estudantes.

Neste artigo apresentamos os resultados da fase da intervenção, os instrumento da coleta de dados foi uma sequência de cinco problemas, mas aqui apresentamos apenas os resultados e análise de dois problemas, devido as limitações do espaço disponibilizado pela resvista.

Os problemas aplicados na intervenção, possuíam características dos propostos em avaliações de larga escala. A intervenção foi desenvolvida em cinco encontros presencial, com duração de 1h40min cada encontro. Foi aplicado em cada encontro apenas um problema. Os estudantes resolveram os problemas em grupo, após a resolução, cada grupo apresentou suas estratégias para os demais grupos e, para finalizar o encontro, o professor pesquisador fazia a formalização, ou seja, complementava com pontos conceituais não discutidos nas apresentações dos grupos. Os encontros foram filmados e gravado e as folhas com as rubricas dos alunos foram nomeadas com nomes fictícios para garantir o anonimato dos participantes. Ao final do encontro, os problemas foram recolhidos pelo pesquisador para análise.

A seguir, na Tabela 1, apresentamos a divisão dos grupos e seus integrantes. Os nomes, escolhidos pelos estudantes, são fictícios.

Tabela 1 – Organização dos grupos

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
Paris	Croácia	Bulgária	Dinamarca	Malta
Berlim	Albânia	Bélgica	Grécia	Amsterdã
Luxemburgo	Madrid	Eslovênia	Portugal	Itália
Londres	Suíça	Espanha	Alemanha	Hungria

Fonte: Desenvolvido pelos autores

JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DOS PROBLEMAS

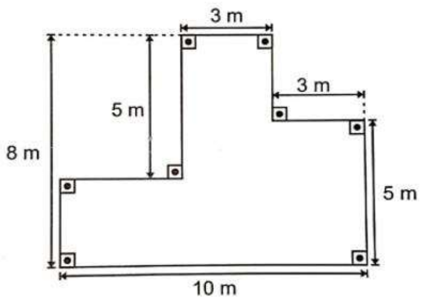
Na intervenção, propusemos problemas, utilizando um quadro das grandezas e medidas para complementar a natureza numérica, operacional ou algébrica do problema. Ainda, optamos por problemas abertos e fechados, cujo contexto estivesse relacionado a situações do cotidiano, de maneira que todos os dados do problema pudessem ser considerados no desenvolvimento das heurísticas e das estratégias. Estas características, acreditamos, podem ter sido a causa de os estudantes aceitarem o desafio de resolvê-los.

Nossa expectativa foi que a escolha dos problemas desta fase nos ajudasse a investigar se um processo de ensino que promovesse reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes do Ensino Médio, sobre a resolução de problemas, pudesse favorecer a construção, o aprofundamento e a ampliação de conhecimentos dos estudantes sobre perímetro e área.

Antes de apresentarmos os dois problemas da fase da intervenção, fez-se necessário retomar os resultados do Problema 1 da fase diagnóstica. Que avaliou a aprendizagem dos estudantes sobre o cálculo de área a partir de um quadro envolvendo grandezas e medidas, que envolvia conceitos de uma figura plana bidimensional. O problema em questão foi:

Figura 1 - Problema 1 da fase diagnóstica

Um museu está passando por uma reforma e um dos objetivos é a restauração de todo o seu piso. O formato e algumas dimensões do piso desse museu estão representados no desenho abaixo.

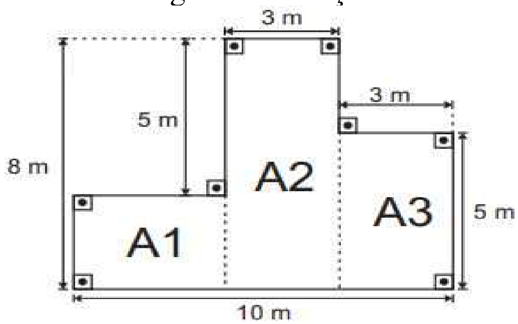


A empresa especializada que fará essa restauração cobra R$ 50,00 por metro quadrado de piso. De acordo com o preço cobrado por essa empresa, quanto custará a restauração do piso desse museu?

Fonte: São Paulo, (2020)

Esperava-se que os estudantes desenvolvessem suas heurísticas, dividindo a representação geométrica em três retângulos: A1, A2 e A3, conforme Figura 2, e, a seguir, continuassem como estratégia calculando as três áreas das referidas figuras e, seguidamente, somá-las para encontrar a área total do piso do museu. Por fim, poderiam multiplicar o valor encontrado por R$ 50,00, referente ao custo do metro quadrado de piso.

Figura 2 - Estratégia de resolução do Problema 1



Fonte: Desenvolvido pelos autores

Os estudantes poderiam proceder, conforme os cálculos apresentados a seguir:

$A1 = [10\,m - (3m + 3m)]\,.(8m - 5m) = 4m\,.3m = 12m^2$
$A2 = 3m\,.8m = 24m^2$
$A3 = 3m\,.5m = 15m^2$
Superfície = $A1 + A2 + A3 = 12m^2 + 24m^2 + 12m^2 = 51m^2$
Custo = $51\,.50 = 2550$

Portanto, o custo para a restauração do piso do museu será de $R\$\ 2.550,00$. Contudo, outras estratégias também poderiam ser desenvolvidas para resolver esse problema.

Constatamos que os estudantes que responderam este problema apresentaram dificuldades em estabelecer o perímetro e a área da referida figura. Dos onze estudantes que resolveram o problema, sete calcularam o perímetro da figura e intuíram que seria a área. As evidências mostraram que eles não compreenderam que para encontrar o perímetro bastava apenas somar os comprimentos dos lados da figura.

Para calcular a área precisariam apenas realizar o produto do comprimento dos lados do polígono após terem realizado alguns procedimentos de decomposição da figura. Observamos, na fase diagnóstica, as dificuldades de os estudantes realizarem composição e decomposição de uma figura bidimensional em figuras mais simples, para calcular a medida de seu perímetro ou da área. Supomos que estas dificuldades poderiam estar relacionadas à falta de trabalhos em sala de aula com figuras planas bidimensionais.

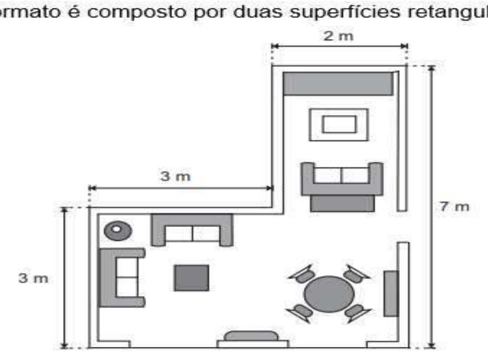
ANÁLISE DIDÁTICA E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O PROBLEMA 1

Foi a partir destes resultados dos Problemas 1, da fase diagnóstica, que escolhemos apresentar dois problemas similares na fase da intervenção. Nosso intuito foi favorecer a construção e o aprofundamento do conceito de perímetro e área de figuras bidimensionais. Assim, no primeiro encontro da intervenção, foi proposto o seguinte problema:

Figura 3 – Enunciado do Problema 1 – Fase da intervenção

Problema 1. Observe, a seguir, a planta baixa da sala do apartamento de Catarina, cujo formato é composto por duas superfícies retangulares.



Qual é a medida do perímetro da sala do apartamento de Catarina? Demonstre seu raciocínio.

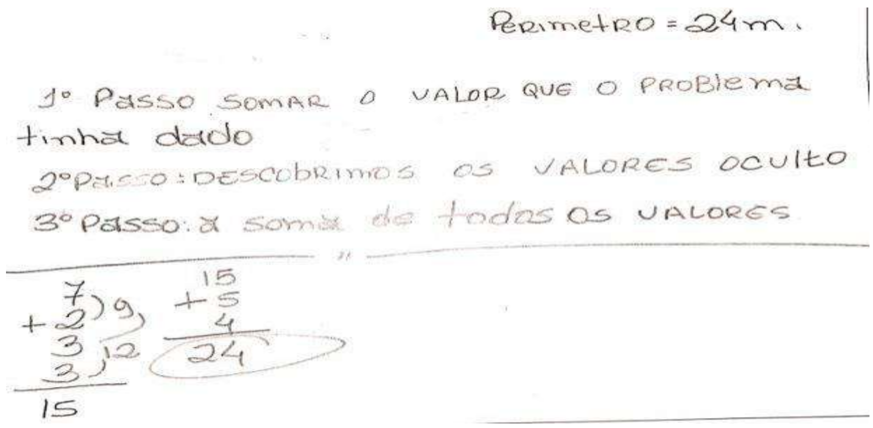
Fonte: OBMEP (2019)

Este problema é do tipo fechado, o quadro das grandezas e medidas está contextualizado a partir de uma planta baixa, possui um comando direto e a natureza envolve o conceito de perímetro. Uma possível estratégia esperada é que os estudantes calculassem o perímetro da figura bidimensional, efetuando a soma do comprimento dos lados desse polígono $5m + 7m + 2m + 4m + 3m + 3m = 24\ m$. Com este problema, desejávamos aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre o cálculo de perímetro de figuras poligonais bidimensionais.

Dos cinco grupos que responderam este problema, apenas o Grupo C apresentou resolução errada, cujo motivo discutiremos mais adiante. Os demais, Grupos A, B, D e E, apresentaram resolução correta, interpretaram o contexto do problema, compreenderam que a natureza do problema se tratava do cálculo de perímetro e desenvolveram heurísticas a partir dos dados explícitos no quadro das grandezas e medidas. Perceberam que dos seis lados da figura estavam explícitos a medida de quatro lados. Para a medida 5 , que não estava explícita na figura; consideraram as medidas dos comprimentos dos lados paralelos, neste caso o 2 e 3 . Para a medida 4 , que também não estava explícita na figura; consideraram a medida do lado paralelo, no caso a medida 7.

Polya (1976) indica quatro etapas para resolver problemas, quais sejam: compreender do problema; construir uma estratégia de resolução; executar a estratégia; revisar da solução. Percebemos que alguns grupos, talvez de forma inconsciente, ou não, seguiram tais passos, por exemplo na resolução do Grupo A, as rubricas feitas descrevem esse roteiro, como vemos na Figura 4.

Figura 4 - Resolução da estudante Paris do Grupo A



Fonte: Acervo da pesquisa

Foi recorrente nos grupos a preocupação dos pares em justificar as estratégias desenvolvidas por meio de um cálculo. Neste primeiro problema, provavelmente por se tratar de um problema fechado, os grupos apresentaram estratégias parecidas na resolução, trabalhando no quadro numérico para validar a resolução. No entanto, analisamos que eles utilizaram corretamente o algoritmo da soma, mas não adotaram a unidade cm para representar a unidade de medida do perímetro. No caso do Grupo E, este respondeu 24 m², conforme rubricas a seguir.

Figura 5 - Resolução da estudante Hungria do Grupo E

$$P = 2 + 4 + 5 + 7 + 3 + 3 = 24\ m^2$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Na fase diagnóstica havia sido recorrente, após calcularem o perímetro, indicarem a resposta da unidade de medida de área elevado ao quadrado. Tivemos o cuidado de observar se respostas deste tipo apareceriam novamente, dos cinco grupos, apenas o Grupo E respondeu $p = 24\ m^2$, conforme rubricas da Figura 5. Na plenária, o grupo foi o último a apresentar suas estratégias. Percebemos que eles já haviam superado a aprendizagem, de que a unidade de medida metro correspondia aos lados do polígono e metros quadrados a unidade de medida de área da figura. Mesmo assim, esses conceitos foram retomados no momento da formalização.

Ao nos movimentarmos por entre os grupos, durante o processo de resoluções, observamos alguns pontos de dúvidas nos Grupos C e E. No Grupo C, a dúvida estava relacionada à medida 4 , paralela ao lado que mede 7, o grupo ficou no impasse se deveria somar o 4 aos demais lados. Ao perceber que a dúvida persistia entre o grupo, aproximamo-nos e perguntamos:

> Pesquisador: e aí grupo, estão com alguma dúvida?
> Estudante Eslovênia: professor, esta parte também é sala? (neste momento apontando para as dimensões da planta que medem 4 e 2).
> Pesquisador: sim, toda esta planta é a sala da Catarina.
> Estudante Eslovênia: entendi!
> Pesquisador: mais alguma dúvida, pessoal?!
> Grupo C: não. professor.

Percebemos uma resistência da estudante Eslovênia em aceitar que o retângulo com dimensões $2\ m$ de base e $4\ m$ de altura fizesse parte da área da sala da Catarina. Inferimos que esta resistência pode ser reflexo da ausência de trabalho em sala de aula com a resolução de problemas e com figuras bidimensionais. Na plenária, o grupo mostrou indícios de que o formato da figura bidimensional causou dificuldades entre os componentes do grupo.

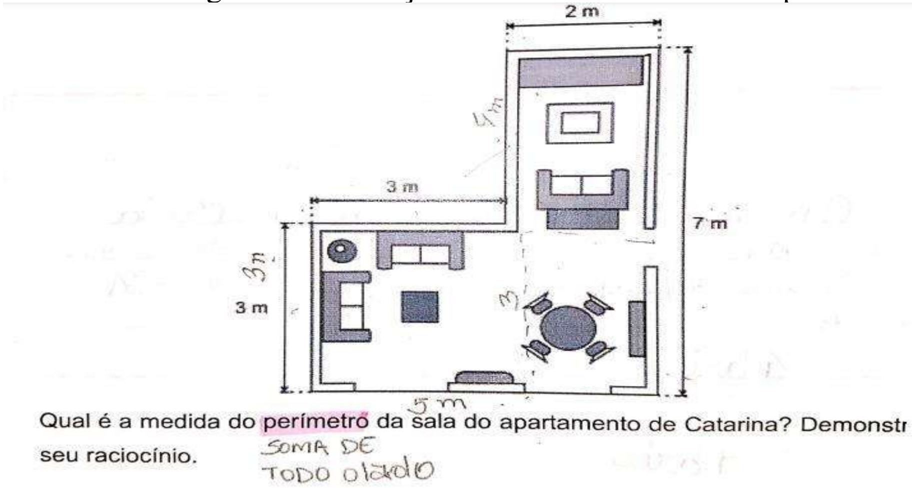
> Estudante Eslovênia: o único valor que faltava é o 5, aí a gente foi descobrir ... $3 + 2 = 5$. Como aqui já tem 7, 3 para 7 faltava 4, aí aqui ficou 4. Só que a aqui a gente não somou, a gente só colocou o 5, que era o que faltava, somamos tudo e deu 20 m, só isso.
> Pesquisador: sobre o 4 m que vocês não somaram? houve algum raciocínio que causou essa dúvida, se somariam ou não o 4 m as demais medidas?
> Estudante Eslovênia: professor, no início nós achamos que não fazia parte da sala.

No Grupo E, a dificuldade foi apenas da estudante Hungria. Ela questionou ao grupo se devia considerar o espaço da porta, ou seja, para ela o espaço vazio deveria ser subtraído dos $7\ m$. As estudantes Itália e Malta o convenceram de que não devia subtrair, pois a abertura da porta não interferia na medida do perímetro.

Sobre esta dificuldade da estudante Hungria de aceitar se deveria contar ou não o vão da porta, nos reportamos a uma recomendação do pesquisador Silva (2016). Segundo ele, é dada pouca importância às práticas em sala de aula, envolvendo relações entre área e perímetro ou situações com um único objeto envolvendo mais de uma grandeza, ou seja, situações que correspondem à realidade, por exemplo, atividades, utilizando plantas baixas ou grades quadriculadas.

Alguns estudantes decompuseram uma figura em outra mais simples para desenvolver heurísticas e estratégias. Na plenária, observamos que alguns apresentaram heurísticas, considerando a decomposição de novas figuras para validarem as medidas que não estavam explícitas na planta, neste caso, o 4 e o 5 . Tomemos como exemplo as rubricas da estudante Paris, do Grupo A, que decompôs a planta da sala em três novas figuras, um quadrado e dois retângulos.

Figura 6 - Resolução da estudante Paris do Grupo A



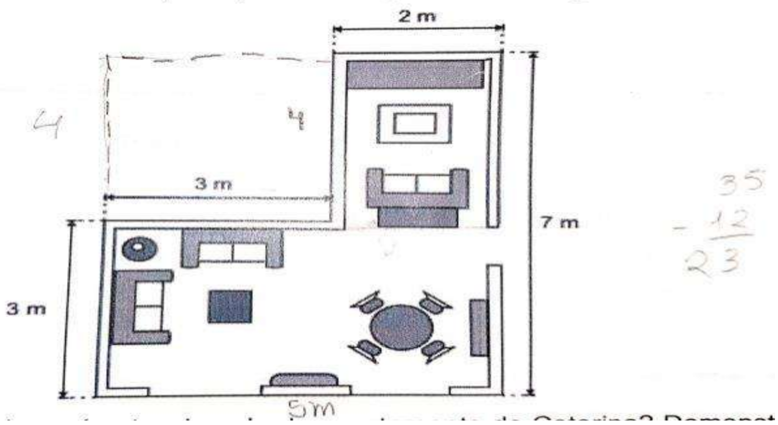
Fonte: Acervo da pesquisa

No momento de socialização entre os participantes do Grupo A, antes da plenária, percebemos as novas figuras rubricadas na planta e questionamos:

> Pesquisador: por que vocês decompuseram a planta nestas três novas figuras? (neste momento o pesquisador apontava para as rubricas da estudante Paris que estava ao centro da mesa).
> Estudante Paris: professor, foi para achar a medida 4 que não está explícito, fiz 3 + 4 = 7. Daí esta medida é 4 (neste momento apontava para o lado que media 4 m).

A estudante Albânia, do Grupo B, compôs a figura em um retângulo medindo $5\ m$ de base e $7\ m$ de altura, conforme Figura 7.

Figura 7 - Resolução da estudante Albânia do Grupo B



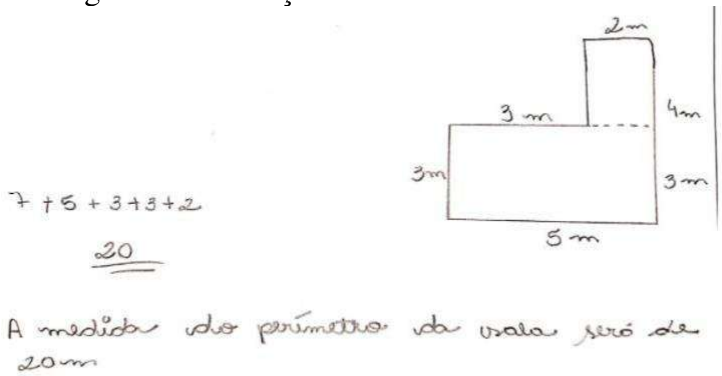
Fonte: Acervo da pesquisa

Ao percebermos que a estudante havia calculado a área do retângulo maior $(35\ m)$, seguido da subtração da área do retângulo menor $(12\ m)$, aproximamo-nos e nos deparamos com o questionamento da sua colega de grupo, Madrid, que disse:

> Estudante Madrid: pra que esta conta aqui? (neste momento apontava para a rubrica da estudante Albânia).
> Estudante Albânia: é que eu achei que era para calcular a área, mas depois vi que não, é só o perímetro.
> Estudante Madrid: sim, só pede para calcular o perímetro.

O Grupo C apresentou dificuldades para assumir se incluiriam a medida 4 , valor não explícito na planta, no cálculo do perímetro.

Figura 8 - Resolução da estudante Eslovênia do Grupo C



Fonte: Acervo da pesquisa

O conceito de perímetro foi amplamente discutido entre os grupos e os seus participantes, mas as heurísticas e as estratégias, a partir da composição ou decomposição da figura bidimensional, foram pouco exploradas. Na formalização, ampliamos as estratégias, utilizando as possibilidades por meio da composição e decomposição.

Segundo Douady (1992), durante a resolução de um problema, o estudante pode mudar constantemente suas estratégias, trabalhar com dois quadros paralelamente ou migrar para um novo quadro. Este processo de devir, que a autora chama de dinâmico, é definido como mudanças de quadros. Todavia, nesta perspectiva do trabalho com a mudança de quadros, foi possível percebermos que os estudantes ao trabalharem no quadro numérico, apresentaram indícios de dificuldades de utilizar números para associar à grandeza numa dada unidade de medição, por exemplo, cm ao perímetro e cm² a área. Segundo o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2018, p. 367)

> [...] é importante que as situações apresentadas pelo professor propiciem ao estudante construir a distinção entre os três elementos envolvidos no trabalho com as grandezas geométricas: a figura

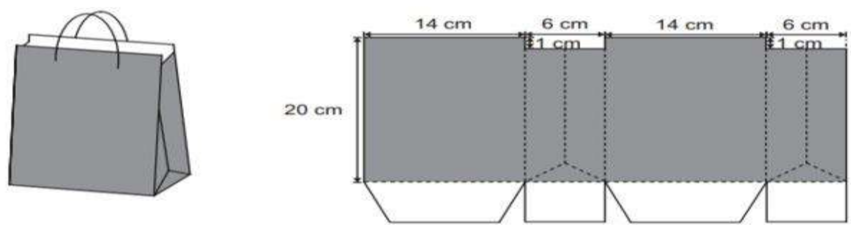
> (quadrados, retângulos etc.), a grandeza associada à figura (comprimento de 2m, perímetro de 12m, 4m² de área, capacidade de 30 l etc.) e o número associado à medição dessa grandeza numa dada unidade (2, 12, 4 etc.)

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), é fundamental que os estudantes entendam a noção de grandeza enquanto atributo de um objeto. No caso dos conceitos de área e perímetro, na fase diagnóstica da pesquisa de Santos (2021), mostraram-se ainda confusos para os estudantes, que acreditamos terem sido superados nesta fase da intervenção.

O PROBLEMA 2

No intuito de aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre o cálculo de área de figuras composta por quadriláteros, este problema foi escolhido para trabalhar o cálculo de área de figuras geométricas planas do tipo bidimensional e aprofundar o conceito de justaposição de figuras planas. Para tanto, foi proposto o seguinte problema:

Figura 9 – Enunciado do Problema 2 – Fase da intervenção


Problema 2. Uma gráfica produz sacolas de papel personalizadas e cobra pelo serviço de acordo com a medida da área da superfície lateral da sacola. Essa medida é calculada pelo molde da sacola, cujas faces têm formato retangular. Observe abaixo um modelo de sacola produzido por essa gráfica e o seu molde, com a superfície lateral colorida de cinza.

Qual é a medida da área da superfície lateral desse modelo de sacola produzido por essa gráfica? Demonstre seu raciocínio.

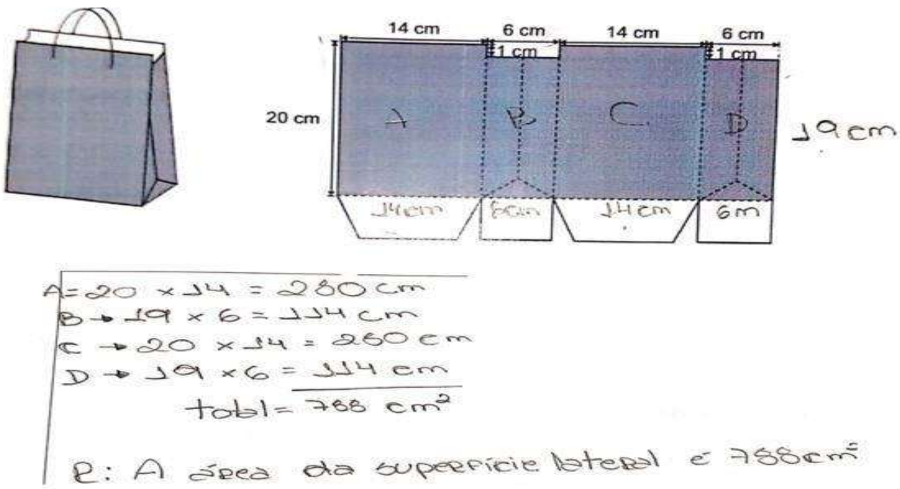
Fonte: Saeb (2019)

Este problema é do tipo fechado, para resolvê-lo os estudantes necessitariam mobilizar conhecimentos para calcular a área do retângulo. O quadro das grandezas e medidas é constituído da planificação da superfície de uma sacola, a área a ser calculada foi hachurada, e visualmente percebe-se a imagem de quatro retângulos justapostos. Para resolvê-lo, esperava-se que os estudantes levassem em conta a área hachurada e visualizassem quatro retângulos na planificação, tendo em vista que dois a dois são iguais.

Na resolução, uma das estratégias esperada era justapor os retângulos de dimensões iguais e efetuar dois cálculos, um considerando as dimensões do retângulo maior, calculando $20\ cm\ .\ 28\ cm\ =\ 560\ cm^2$ e o outro, considerando as dimensões do retângulo menor $19\ cm\ .\ 12\ cm\ =\ 228\ cm^2$, seguido da soma $560\ cm^2\ +\ 228\ cm^2\ =\ 788\ cm^2$. Os estudantes poderiam também apresentar os cálculos das áreas dos quatro retângulos, distintamente, e somá-las ao final para obter a medida da área hachurada.

Ao analisar as rubricas, percebemos que os estudantes mobilizaram estratégias, considerando raciocínios pautados na decomposição da figura planificada, que foi o caso dos Grupos A, C e D. Os grupos B e E apresentaram soluções incorretas. As rubricas da estudante Dinamarca, do Grupo D, ilustrada na Figura 10, foi uma estratégia comum, adotada pelos três grupos que acertaram a resolução.

Figura 10 - Resolução da estudante Dinamarca do Grupo D



Fonte: Acervo da pesquisa

Os estudantes do Grupo D identificaram os retângulos, chamando-os de A, B, C e D, compreenderam que o comprimento $1\ cm$, assentada na base da profundidade da lateral da parte superior da bolsa, devia ser subtraída do comprimento (altura) $20\ cm$. Validaram, a seguir, a estratégia, trabalhando no quadro numérico, calculando as áreas dos retângulos e somando-as ao final.

Quando a dúvida entre os participantes de um grupo persistia, havia a socialização entre um grupo e outro, conforme apresentamos na transcrição a seguir das interações entre o Grupo A e B:

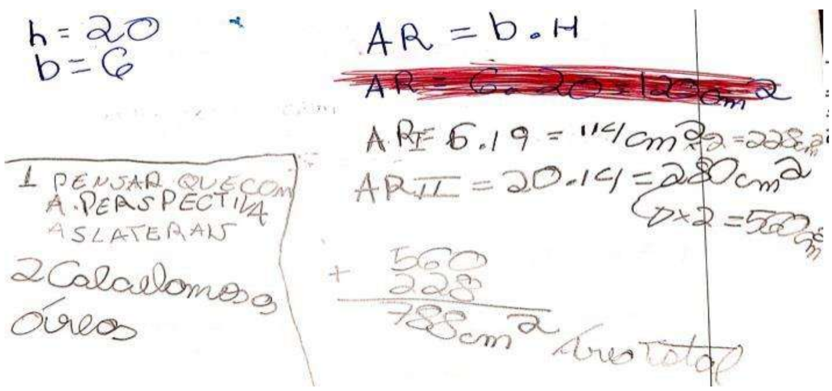
> Estudante Londres do Grupo A: vocês consideraram toda esta área aqui ou só esta área menor? (apontando para a área hachurada da planificação da sacola).

> Estudante Albânia do Grupo B: então, o exercício pede para calcular a área da superfície lateral. Aqui no modelo a gente percebe que são retângulos e tem retângulos maior e retângulo menor. A área do retângulo é lado vezes lado, certo?
> Estudante Londres do Grupo A: certo!
> Estudante Albânia do Grupo B: [...] aqui nesta medida você percebe que é 14 e aqui é 20, então você vai fazer 20 vezes 14. Só que aqui como é um retângulo menor aqui está mostrando que está cortando 1 cm. [...] Então 20 menos 1 dá 19. Neste retângulo menor você faz 19 vezes 6, aí depois você soma tudo e vai achar a área total, entendeu?
> Estudante Londres do Grupo A: ah, entendi!

Segundo Allevato e Onuchic (2014), ao utilizar a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Matemática da Resolução de Problemas, o professor não só tem a oportunidade de perceber constantemente os conhecimentos que os estudantes detêm, ajudando-os durante o processo, como também os próprios estudantes percebem a dificuldade do outro e se ajudam. Várias vezes observamos aqueles estudantes, que possuíam conhecimentos prévios sobre os conceitos envolvidos no problema, explicarem-nos para os demais, para superarem juntos pontos de dificuldades e, desta forma, avançarem na resolução do problema.

Após a explicação da estudante Albânia, o Grupo A corrigiu suas estratégias e as validou, efetuando o cálculo das áreas dos retângulos e somando-as, ao final, para responder o problema, conforme rubricas presentes na Figura 11.

Figura 11 - Resolução do estudante Londres do Grupo A



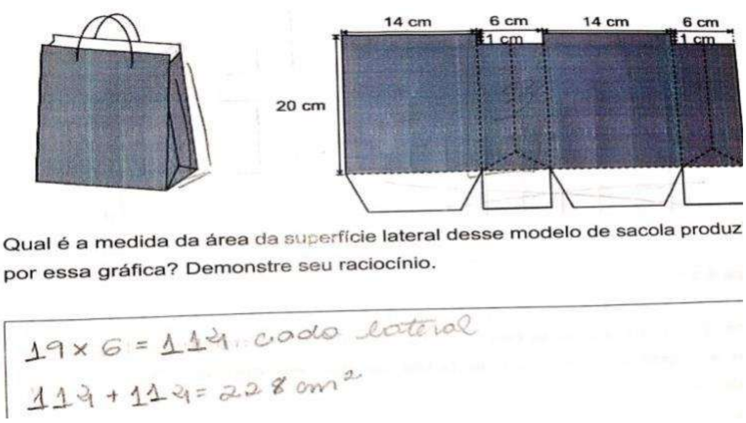
Fonte: Acervo da pesquisa

A linguagem matemática na maioria das socializações era imprecisa, ou seja, tomemos como exemplo os momentos em que a estudante Albânia do Grupo B chamou o problema de “*exercícios*” e a profundidade da lateral superior da sacola de “*cortando 1 cm*”. Tomamos nota destes vocabulários imprecisos e, no momento da formalização, os retomamos, indicando, então, o vocabulário formal.

Os grupos A e B tiveram dúvidas quanto ao conceito de superfície lateral, mesmo o comando do problema, perguntando “Qual é o valor da área da superfície lateral” e tendo apresentado a planificação da sacola com as medidas das respectivas dimensões e a área a ser calculada hachurada.

Enquanto a dúvida do Grupo A foi superada antes da plenária, a do Grupo E foi sanada durante a plenária e no momento da formalização dos conceitos envolvidos no problema. A Figura 12 mostra as rubricas da estudante Hungria do Grupo E e a transcrição do momento da plenária, quando ela socializou as estratégias do grupo, utilizando a imagem e os cálculos.

Figura 12 - Resolução da estudante Itália do Grupo E



Fonte: Acervo da pesquisa

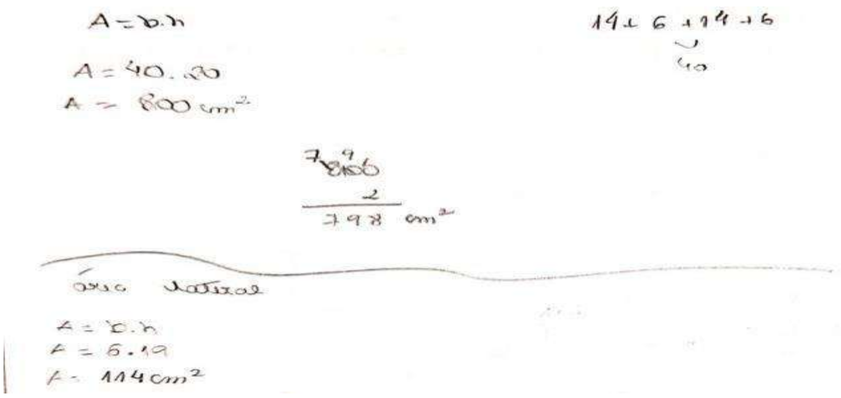
> Estudante Hungria: olhamos a figura e a gente percebeu estas medidas aqui: 20, 14, 6 e 1. Aí o que a gente pensou, lendo aqui o comando, a gente observou que era a medida da superfície lateral (neste momento apontou para o lado demarcado na sacola).
> [...] aí a gente pegou o lado, que é 20 e subtraí o 1 que deu 19. Aí o que a gente fez, como era a lateral aí pensamos e vimos que os lados eram aqueles dois ali que estão abaixo do 1 (neste momento apontou para os dois retângulos com dimensões menores na planificação).
> aí pegamos o 20 subtraímos por 1 para dá a medida do lado.
> [...] aquela área ali não conta (neste momento apontou para o retângulo com dimensões maiores na planificação) e multiplicou por 6 ... que deu 114, como são dois lados, a gente multiplicou por dois e deu 228 cm².

Inferimos que neste problema, pelo fato da sacola tratar de um objeto tridimensional, a ideia de trabalhar com a planificação apenas da superfície lateral e também da justaposição, talvez tenha sido um ponto de dúvida entre eles. Estas questões demonstram, talvez, a ausência de trabalhos na sala de aula com problemas que envolvam naturezas diversas, ou seja, que não concentre o ensino apenas utilizando tarefas que envolvam polígonos com quatro lados.

Quando percebíamos que alguma dúvida persistia, nos aproximávamos e estabelecíamos um diálogo, para que ela fosse resolvida e eles prosseguissem com as estratégias. No entanto, outras acabavam sendo sanadas apenas no momento da plenária.

Anteriormente, apresentamos a transcrição do diálogo entre os estudantes Albânia do Grupo B e Londres do Grupo A. A estudante do Grupo B socializou um raciocínio correto com o Grupo A sobre uma estratégia para resolver o problema, logo em seguida, o Grupo B foi convencido pela participante Croácia de uma nova estratégia que, segundo a estudante, faria o cálculo mais rápido. Ela convenceu o grupo de que poderiam considerar um único retângulo com dimensões, medindo 40 cm de base e 20 cm de altura e, após o cálculo da área, subtraiam 2 cm^2 e não 12 cm^2, que seria o correto. Os cálculos, expostos na Figura 13, comprovam a validação das heurísticas e a estratégia do Grupo B.

Figura 13 - Resolução da estudante Croácia do Grupo B



Fonte: Acervo da pesquisa

Na plenária, ao apresentarem esta estratégia, a estudante Malta do Grupo E, exclamou:

> Estudante Malta: mas 1 cm é da base e não a área, aí vocês tinham que considerar para estes dois buracos em forma de retângulo 12 cm²! Não é, professor!?
> Pesquisador: sim, a estratégia do grupo é válida para resolver o problema, porém o grupo deixou passar esta observação.
> Estudante Albânia: aí, gente! eu falei que a medida da área não era essa ...
> Estudante Croácia: mas quase acertamos, só calculamos 10 cm² a mais. Risadas.

Em nossa análise prospectiva das possíveis respostas não havíamos pensado nesta possibilidade de resolução, a qual foi inserida no momento da formalização.

Durante os processos de resolução de um problema, alguns procedimentos heurísticos podem ser utilizados para fazer analogias, desenvolver novos modelos ou reduzir um problema para um mais simples, como fez a estudante Croácia. Segundo Douady (1992), estes procedimentos heurísticos são esquemas elásticos que permitem certo grau de variabilidade e capacidade de adaptação a determinadas condições e que orientam, de uma forma geral, a resolução de um problema. Outra aprendizagem visível no Grupo B, é a de perímetro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reflexões desenvolvidas a partir dos resultados expostos nas seções anteriores constituíram base para elaborar respostas às nossas duas questões de pesquisa. A primeira, "Um processo de ensino que promova reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes do Ensino Médio sobre a resolução de problemas que envolvem mudanças de quadros, geométrico, numérico e algébrico, pode favorecer a construção de conhecimentos dos estudantes sobre perímetro e área?". Nossa resposta foi sim.

Investigamos que foram desenvolvidas por meio do ambiente colaborativo da metodologia resolução de problemas três tipos de socialização, que foram: a socialização entre os participantes de um grupo; a socialização na plenária entre os participantes de todos os grupos; e a socialização na formalização entre os participantes de todos os grupos e o pesquisador. Em cada uma destas socializações, identificamos que as reflexões desenvolvidas dentro delas possuíam características diferentes, potencialmente valiosas no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Nas socializações entre os participantes de um grupo, as heurísticas desenvolvidas eram temporárias, os estudantes investigavam por meio do compartilhamento das heurísticas as possibilidades do uso de um conceito para desenvolver uma estratégia. Neste tipo de socialização, a disputa por uma melhor heurística para representar no papel a rubrica da estratégia parecia uma batalha. Pudemos, neste tipo de socialização, avaliar o aprofundamento da aprendizagem dos grupos sobre os conceitos envolvidos em cada problema.

As socializações na plenária entre os participantes de todos os grupos eram desenvolvidas a partir de uma estratégia que já estava representada por meio de um modelo matemático. As socializações, observadas no cenário da plenária, permitiam que os estudantes e o pesquisador interpretassem resoluções, trocassem experiências e aprendessem novas estratégias. Uma heurística abandonada por um grupo, muitas vezes por falta de conhecimentos prévio, era adotada por outro grupo e, ao ser apresentada na plenária, causava curiosidade naquele grupo que a havia abandonado. Estas ações intensificavam os debates na plenária. Assim, notamos neste tipo de socialização, um fértil ambiente de aprendizagem para construir e ampliar os conhecimentos sobre perímetro e área.

Nas socializações entre todos os participantes dos grupos na formalização, era o pesquisador quem, na maioria das vezes, provocava os discursos. O pesquisador retomava estratégias abandonadas pelos grupos, apresentava novas, estabelecia conexões e formalizava os conceitos envolvidos no problema. A socialização nesta fase parecia ser mais interna ao estudante e com ele mesmo. A despeito de haver poucas discussões e poucos questionamentos ao pesquisador, o efeito desse momento da formalização era sentido na resolução do próximo problema, a autonomia dos estudantes aumentava e as conexões dos conceitos envolvidos no problema eram desenvolvidas com maior rapidez.

Pudemos também analisar que a partir das socializações entre os grupos, da plenárias, das atitudes de cooperação dos estudantes entre eles e das reflexões na etapa da formalização, foram etapas fundamentais e importantes para que eles pudessem rubricar suas heurísticas, compreender as dificuldades dos problemas, chegar às conclusões acertadas, desenvolver estratégias e superar as dificuldades. Por fim, a partir desta análise, justificamos a resposta da nossa segunda questão de pesquisa "Em caso positivo, quais são as contribuições?", pois o cenário investigativo da metodologia empregada na intervenção agregou diversas contribuições, tanto no ensino, quanto na aprendizagem.

As socializações entre os componentes dos grupos, as plenárias, as atitudes de cooperação dos estudantes entre eles e as reflexões na etapa da formalização, foram fundamentais e importantes para que eles pudessem compreender as dificuldades dos problemas, chegar às conclusões acertadas, superar as dificuldades e potencializar o desenvolvimento de habilidades heurísticas.

Constatamos que alguns grupos apresentaram dificuldades não apenas com os conceitos de perímetro e área, mas também com a interpretação e a aplicação destes conceitos na resolução de problemas. Para superar este obstáculo se faz necessário que professores explorem esses conceitos e procedimentos matemáticos, utilizando os princípios da resolução de problemas. As atividades não devem pautarem-se apenas em itens que valorizem o cálculo das grandezas e medidas a partir de figuras planas e com quatro lados, é necessário variar as tarefas, trabalhar o cálculo das grandezas e medidas não apenas a partir de figuras bidimensional, mas também tridimensional. A composição, decomposição, planificação, devem ser também trabalhadas.

Percebemos em nossa intervenção a falta de hábito dos estudantes de revisar os passos desenvolvidos na resolução. Muitas vezes eles apresentavam heurísticas e estratégias corretas, mas erravam apenas nos cálculos. Essa falta de hábito de revisar a resolução do problema denota ausência do trabalho na sala de aula na perspectiva da resolução de problemas.

O foco das avaliações em larga escala é avaliar a aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas. Apesar do objetivo de cada problema proposto nessas avaliações ser avaliar uma única habilidade ou descritor, a natureza dos problemas trata da inter-relação de conceitos que poderiam pertencer a duas ou mais habilidades. Em vista disso, concluímos que o processo da resolução de problemas e o trabalho com os quadros das grandezas, medidas, numérico, algébrico são essenciais no cenário das avaliações em larga escala.

Acreditamos que uma investigação futura poderia verificar se uma intervenção nos moldes da que foi realizada neste estudo, sendo realizada de forma colaborativa com o professor da turma e por um período maior, interferiria de forma positiva na aprendizagem dos estudantes e nos resultados das avaliações em larga escala.

Nesta perspectiva heurística, o papel do professor é fomentar as contribuições e o debate, ensinando através da resolução de problemas, iniciando com problemas mais simples e a partir do desenvolvimento de habilidades dos estudantes, propor problemas mais complexos. Conforme todos sugerem soluções, as heurísticas e estratégias vão surgindo de diferentes maneiras, os conceitos mais importantes para resolver o problema vão surgindo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? *In*: Resolução de Problemas**:** teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014.

BARBEDO, N. G. Resolução de problemas no fim da escolarização básica: Estudo de alguns casos. 2017. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: < http: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 18 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, Brasil, 2019. Disponível em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados. Acesso em: jan. 2020.

COBB, P. et al. Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher, v. 32, n. 1, p. 9 -13, jan./fev. 2003.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l’enseignement. Repères IREM, 1992.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. Thinking mathematically. London: Addison - Wesley, 1982.

OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. (2015). Banco de Questões 2015. Rio de Janeiro. Editora OBMEP. Disponível em http://www.obmep.org.br/ . Acesso em 05 de outubro de 2019.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. Currículo de Pernambuco: ensino fundamental. Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: Secretaria, 2018.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1976.

SANTOS, J. C. A resolução de problemas sobre perímetro e área: um experimento de ensino, utilizando problemas propostos em avaliações de larga escala. 2021.Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2021.

SILVA, J. V. G. Grandeza e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SÃO PAULO. Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Saresp. Recuperado em 02 de março, 2020, de https://saresp.fde.sp.gov.br/Default.aspx.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação. Avaliação de Aprendizagem em Processo. Matemática. Recuperado em 05 de fevereiro, 2020, de https://www.educacao.sp.gov.br/avaliacoes.

Submetido *em 20/05/2024.*

Aprovado *em 02/10/2024.*