

ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

TEACHING AND LEARNING TRIGONOMETRY WITH GEOGEBRA SOFTWARE

Reinaldo Oliveira Reis Júnior
Universidade Estadual de Santa Cruz
oliveira981@hotmail.com

Eduardo Delcides Bernardes
Universidade Estadual de Santa Cruz
eduardodbernardes@hotmail.com

Resumo

As Tecnologias de Comunicação e Informação (TIC) têm sido ferramentas com potencial importante no processo de ensino e aprendizagem, razão pela qual se transformaram em instrumentos de pesquisa, notadamente na Educação Matemática. Nesse contexto, propõe-se analisar o tratamento dos tópicos mais relevantes de Trigonometria apresentados aos alunos ao longo do Ensino Básico utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra, dando ênfase aos conteúdos referentes à introdução à Trigonometria. Dessa forma, dá-se ênfase às possíveis relações que emergem em sala de aula mediante a introdução de um ambiente computacional de aprendizagem, a fim de destacar o processo de coordenação entre os registros de representações referentes aos tópicos de Trigonometria sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para as séries abordadas pelo presente projeto. Por fim, enumerar-se-ão as potencialidades do *Software* GeoGebra que mediam de forma positiva o ensino destes conceitos.

Palavras-chave: TIC. Sequência Didática. Trigonometria. GeoGebra. Registros de Representação.

Abstract

Information and Communication Technologies (ICT) have been tools with important potential in the teaching and learning process, which is why they have become research instruments, notably in Mathematics Education. In this context, it is proposed to analyze the treatment of the most relevant topics of Trigonometry presented to students throughout the Basic Education using the tools of the *software* GeoGebra, emphasizing the contents referring to the introduction to Trig. In this way, emphasis will be placed on the possible relationships that emerge in the classroom by introducing a computational learning environment, in order to highlight the process of coordination between the representations registries referring to the topics of Trigonometry suggested by the National Curricular Parameters for The series

addressed by this project. Finally, we will list the potential of GeoGebra Software that positively measures the teaching of these concepts.

Keywords: ICT. Following teaching. Trigonometry. GeoGebra. Representation Registers.

Introdução

As representações assumem papel importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente no que tange aos conceitos que envolvem a Trigonometria. A viabilidade e a interação proporcionadas pelo uso das novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), particularmente dos ambientes computacionais de aprendizagem (*softwares* educativos, como o GeoGebra¹, em específico neste caso), são elementos essenciais que permeiam o processo de compreensão de conceitos de um dado objeto matemático. Ressalta-se, também, que o uso de tecnologias é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico (PONTE et al., 2007), o que corrobora a utilização destas a fim de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática.

Nesse contexto, é importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informações de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo da Trigonometria, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações (NCTM, 2007; KIERAN, 2007). Ante estes fatores, é válida a observação de que os tópicos que abrangem a Trigonometria são contemplados em praticamente todas as instituições de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, ratificada tanto nos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP, quando referido à Educação Básica) quanto nos Projetos Acadêmicos Curriculares (PAC, quando referido ao Ensino Superior).

No âmbito das variedades de representações a fundamentação necessária decorre de algumas das teorias que compõem as Referências Teóricas da Didática Francesa, das quais se destacam a Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), a Teoria Antropológica da Didática de Chevallard (1992) e as noções de Registros de Representações Semióticas, propostas por Duval (1995). A primeira se interessa pelo estudo da utilização de ferramentas tecnológicas, fornecendo condições para o professor construir conhecimentos relacionados com as técnicas

¹ O GeoGebra, *software* de geometria dinâmica, foi desenvolvido por pesquisadores da Universidade americana Florida Atlantic University. Destinado principalmente ao Ensino Básico e Secundário, possui uma infinidade de ferramentas destinadas ao ensino de Matemática. Além de editado em uma versão em língua portuguesa, este *software* apresenta mais uma valia: é de domínio livre (gratuito) ficando disponível para professores e alunos, tanto nas escolas quanto em casa. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/download>.

computacionais, além de entenderem por que e como integrar as tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. A segunda enfatiza o estudo de elementos institucionais, na medida em que toda a instituição que se interessa pelo ensino da Matemática pode ter acesso a esses objetos, em especial no contexto desta pesquisa, a Trigonometria e o ambiente computacional GeoGebra. A terceira aborda principalmente o processo de coordenação entre dois ou mais registros de representação de um dado objeto matemático, neste caso.

Com isso, objetiva-se neste trabalho analisar o tratamento dos tópicos mais relevantes de Trigonometria apresentados aos alunos ao longo do Ensino Básico utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra, dando ênfase aos conteúdos referentes à introdução à Trigonometria. Nesse sentido, buscando contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da Trigonometria, propomo-nos, em específico, realizar uma análise institucional considerando o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC como instituição de referência e uma escola do Ensino Fundamental II da Educação Básica como instituição de aplicação, além disso, destacar as praxeologias² propostas nessas instituições em torno desse objeto e, em seguida, envolver, tanto os professores quanto os alunos da instituição de aplicação, a fim de realizar uma Sequência Didática (SD) em torno do Ensino e Aprendizagem da Trigonometria, partindo do pressuposto de que é relevante compreender o modo como os alunos lidam com diversas formas de representações quando utilizam o GeoGebra como ferramenta.

Referências Teóricas da Didática Francesa

Partindo do pressuposto que as referências teóricas em pesquisas voltadas para a educação em geral têm como objetivo fundamentar e fornecer o aporte necessário a fim de compreendermos e interpretarmos os fenômenos do processo de ensino e aprendizagem (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007), nesta análise servimo-nos de três das principais teorias que compõem as Referências Teóricas da Didática Francesa. São elas: a Teoria da Instrumentação, de Rabardel (1995), a Teoria Antropológica da Didática, de Chevallard (1992) e as noções de Registro de Representações Semióticas de Duval (1995).

Retomando a perspectiva da pesquisa, verificamos que por se tratar de uma abordagem que perpassa pela análise de um dado objeto matemático em múltiplos registros de representação (ambiente computacional e ambiente papel/lápis), fazemos alusão à

² Conceito que permeia a abordagem teórica proposta por Chevallard (1992), no que diz respeito à Teoria Antropológica da Didática. Ele propôs a noção de praxeologia, como conceito fundamental, para estudar “as práticas institucionais relativas a um objeto do saber e em particular as práticas sociais em Matemática” (HENRIQUES, 2007).

aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas. Nesta linha destacamos o conceito de ergonomia cognitiva, quando nos referimos aos processos mentais, tais como percepção, atenção, cognição, controle motor e armazenamento e recuperação da memória, e como eles afetam as interações entre seres humanos e outros elementos de um sistema. Sistema este o ambiente computacional, onde fazemos menção às demandas relacionadas à ergonomia cognitiva, as quais o indivíduo detém para realizar alguma tarefa.

Por razões de valermos-nos do ambiente computacional, deve-se considerar também a dimensão instrumental, que recorre imediatamente ao conceito de ergonomia, citado anteriormente, relativo à aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas, fazendo referência assim à Teoria da Instrumentação proposta por Rabardel (1995). O ponto de partida desta teoria apresenta que dada ferramenta não pode ser considerada um instrumento prático de imediato, haja vista se nela for depositada alguma utilidade, “transformando-a” em um instrumento, propriamente dito, eficaz e utilitário. Com isso, Henriques, Attie e Farias (2007, p. 54) discorrem a respeito da concepção do instrumento, alertando que não se pode considerá-lo como algo dado, fornecido,

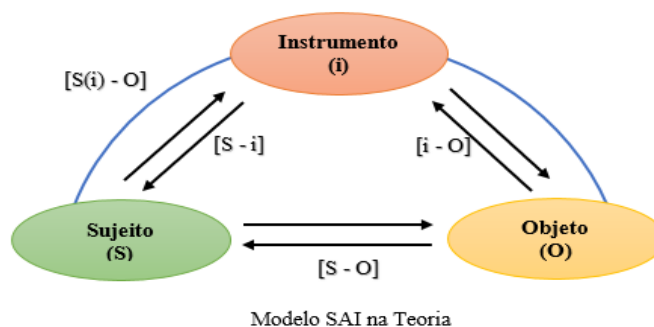
[...] ao contrário, ele é construído pelo sujeito ao longo de um processo de gênese instrumental³. A transformação de artefatos em instrumentos aparece como resultado de processos complexos que colocam, simultaneamente em jogo, o sujeito com as suas competências cognitivas, o artefato, com suas características próprias e o objeto para o qual a ação é dirigida. Estes três pólos condicionados pelo ambiente de aprendizagem no qual estão inseridos levaram Rabardel (1995) a considerar um instrumento como uma entidade mista formada por dois componentes: Por um lado, um artefato (material ou simbólico) produzido pelo sujeito ou por outros. De outro lado, um (ou vários) esquema(s) de utilização⁴ associado(s), resultante(s) de uma construção própria do sujeito, autônomo ou de uma apropriação de ESU (esquemas sociais de utilização), estes já formados externamente a ele. (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 54).

³ Entende-se por gênese instrumental o processo de “transformação” de uma dada ferramenta em um instrumento, “sendo que o sujeito deve desenvolver competências para identificar problemas dos quais um dado instrumento é adaptado, e em seguida executá-los por meio desse instrumento” (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 54).

⁴ Para a integração de ambientes computacionais às atividades matemáticas dever-se-á construir esquemas de utilização mais ou menos adaptados e mais ou menos eficazes. Segundo Rabardel, os esquemas são multifuncionais. Postos em situações precisas ajudam a: compreendê-las (função “epistêmica”); agir, transformar, resolver (sua função pragmática); organizar e controlar a ação (sua função heurística). O autor apresenta os esquemas de utilização em três categorias: Esquemas de uso - correspondentes às atividades relativas à gestão das características e propriedades específicas do artefato; Esquemas de ação instrumental - correspondentes às atividades para as quais o artefato é um meio de realização; e, Esquemas de atividades coletivas instrumentais - correspondentes à utilização simultânea ou conjunta de um instrumento num contexto de atividades, respectivamente, compartilhadas ou coletivas (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 54).

Posto isto, segue a representação do esquema de Situações de Atividades Instrumentais (SAI), proposto por Rabardel (1995), onde as relações entre o sujeito e um dado objeto sobre o qual ele atua são descritas.

Figura 1 - Situações de Atividades Instrumentais (SAI).



Fonte: Henriques, Attie e Farias (2007).

No esquema SAI acima, temos como objetivo principal destacar a multiplicidade de interações que mediam as atividades envolvendo determinado instrumento (i), sujeito (S) e um objeto (O). Aproximando estas conclusões para a temática desta pesquisa, temos que o sujeito (S) em questão se refere a dado aluno da Educação Básica e/ou do Ensino Superior; o instrumento (i) alude ao ambiente computacional, mais precisamente ao ambiente computacional de aprendizagem GeoGebra; e, o objeto (O) diz respeito aos tópicos de Trigonometria utilizados para a construção das Sequências Didáticas (SD). Ainda no que tange ao processo de gênese instrumental, Rabardel (1995) distingue duas extensões para tal: instrumentação e instrumentalização. Segundo Henriques, Attie e Farias (2007, p. 55),

[...] a dimensão de instrumentação é orientada à constituição de esquemas de utilização e o processo de instrumentalização necessita da mobilização de conhecimentos matemáticos. Na instrumentação, o sujeito adapta o seu problema aos recursos do artefato. E na instrumentalização o sujeito modifica as propriedades do artefato, para resolver o seu problema.

Salientamos aqui a importância da distinção destas duas dimensões, haja vista a necessidade dos estudantes de mediar a transição de um ambiente para o outro, ou seja, estabelecer relações entre os múltiplos registros de representação do objeto em estudo.

A priori, destacamos, até aqui, as bases teóricas que nos fornecem subsídios para o estudo da aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas por meio da Teoria da Instrumentação, proposta por Rabardel (1995). Porém, como inserimos nesta pesquisa as relações existentes entre o objeto de estudo e a sua ocupação em determinada instituição de referência, nesse caso a Trigonometria (objeto) e o curso de Licenciatura em Matemática da

Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC (instituição), faz-se necessário um aporte teórico adequado para delinear as relações institucionais e pessoais. Com isso recorreremos à segunda teoria citada anteriormente: a Teoria Antropológica da Didática (TAD), proposta por Chevallard (1992). A chave para esta teoria consiste principalmente na ideia relativa à transposição didática que consiste no conjunto de transformações que sofre um objeto de saber (conhecimento) com a finalidade de ser ensinado. Henriques, Attie e Farias (2007, p. 58) afirmam que

[...] essa abordagem considera os objetos matemáticos, não como existentes entre si, mas como entidades que emergem de sistemas e práticas de dadas instituições. Esses sistemas ou praxeologias são descritos em termos de tarefas específicos daquele objeto, das técnicas que permitem resolvê-los, e através dos discursos que servem a explicar e justificar as técnicas. Essas técnicas podem ser caracterizadas do ponto de vista instrumental [...] Chevallard (1992) propõe elaborar uma antropologia didática, cujo objeto de estudo seria a didática, a fim de estudar, por exemplo, fenômenos acerca do comportamento do aluno diante de um problema matemático.

Considerar tudo em estado de objeto: eis uma das máximas abordadas por Chevallard (1992) na TAD, distinguindo, no entanto, os tipos específicos de objeto. São eles: as instituições, as pessoas e as posições que ocupam as pessoas nas instituições. Concluímos então que ao ocupar determinada posição, essas pessoas acabam por se tornar sujeitos das instituições, contribuindo assim para a existência dessas.

Porém, ao lidar com objetos matemáticos, acabamos por suscitar o conhecimento. Sobre ele, Chevallard (1992) assemelha-o ao saber como forma de organização, e, com isso, propõe algumas relações onde entram em jogo os tipos específicos de objetos. Quando relacionamos um dado objeto (O), uma dada instituição (I) e uma dada pessoa (X), obtendo assim, o reconhecimento deste objeto O por I e por X, falamos em Relação Pessoal - Institucional. Assim, do ponto de vista da abordagem antropológica, consideramos, por exemplo, a Trigonometria como objeto O do saber e o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC como instituição I onde existe O.

Outra relação de importância inegável emerge quando colocamos em evidência a primeira teoria, a da Instrumentação, proposta por Rabardel (1995). Logo, consideramos o objeto O proposto por Chevallard como o mesmo objeto referido por Rabardel nas SAI, e que o instrumento aqui denotado por *i*, seja reconhecido pela instituição I, e que “nesse encontro há intenções de I que se traduzem por práticas existentes nessa instituição, através de técnicas instrumentais de *i* ou de técnicas tradicionais papel/lápis utilizadas para se trabalhar com O, então, podemos falar da relação institucional e pessoal a um instrumento *i*” (HENRIQUES;

ATTIE; FARIAS, 2007, p. 60). Verificando esta ocorrência, falamos então na Relação Institucional a um Instrumento.

Além disso, como nos indagamos sobre quais registros de representação aparecem nas relações entre o objeto matemático, o sujeito e o instrumento, faremos uso das noções de Registros de Representações Semióticas. Estas noções foram desenvolvidas por Raymond Duval em 1995, e referem-se à aprendizagem de objetos do saber, e particularmente, matemáticos por meio de suas representações em diferentes registros. Uma expressão, uma noção, um símbolo, representam objetos matemáticos tais como: um número, uma função, um ponto, ou seja, os objetos não devem ser confundidos com suas possíveis representações. Toda confusão resultará numa perda de entendimento, tornando os conhecimentos adquiridos em conhecimentos inúteis no seu contexto de aprendizagem. Esses princípios, entre outros, levaram Duval (1995) a se interessar pelo estudo de representações semióticas de objetos matemáticos. Perguntamo-nos então: o que é uma representação semiótica? Duval (*apud* HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 68) define que “A representação semiótica é uma representação construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado”.

Henriques, Attie e Farias (2007) também diferenciam três atividades cognitivas fundamentais ligadas aos registros de representações semióticas: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão*. Segundo eles,

A *formação* de uma representação semiótica: baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Por exemplo: composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula, etc.

O *tratamento* de uma representação: é a transformação desta representação no mesmo registro onde foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro. Por exemplo, o cálculo é uma forma de tratamento próprio das escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo integral, cálculo proposicional...).

A *conversão* de uma representação: é a transformação desta representação numa representação de outro registro. Por exemplo, a tradução é a conversão de uma representação linguística numa dada língua a uma representação linguística de outra língua (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 69).

Um esquema, uma expressão algébrica ou uma equação paramétrica, por exemplo, são representações semióticas⁵ que existem em sistemas semióticos diferentes. O tratamento dos

⁵ Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema

objetos matemáticos depende, portanto, das possibilidades de suas representações. Percebemos, no entanto, que dispor de vários registros de representação não é condição suficiente para que o sujeito compreenda determinado objeto de estudo.

Outra condição necessária é a coordenação de representação entre os registros, ou seja, o sujeito deve ser capaz de perceber a representação de um mesmo objeto matemático em dois ou mais registros. No nosso trabalho destacamos pelo menos quatro registros de representação, a saber: a *Linguagem Materna*, o *Registro Algébrico*, o *Registro Gráfico* e o *Registro Numérico*.

Cada um destes registros se distingue, um do outro, pela constituição das regras de conformidade e dos signos que o caracterizam. Na *Linguagem Materna*, as regras gramaticais, por exemplo. No *Registro Algébrico*, os signos como as operações fundamentais, os símbolos, letras etc. No *Registro Gráfico*, os elementos geométricos entre outros e no *Registro Numérico*, as operações, os números, as tabelas numéricas, os pares ordenados numéricos etc. Prosseguiremos com a análise dos elementos institucionais presentes neste trabalho, iniciando pelo *software* GeoGebra.

O Software GeoGebra

Como destacado na primeira nota de rodapé deste relatório, porém de forma diminuta, o instrumento que optamos por analisar consiste num *software* de Geometria Dinâmica. Esta classificação dá-se principalmente pelo fato deste possibilitar a movimentação de objetos na tela do computador, permitindo assim fazer investigações, descobertas, confirmar resultados, fazer simulações, o que permite levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Com o recurso de *softwares* ditos de Geometria Dinâmica, os discentes podem realizar construções que cotidianamente fazem com compasso e régua, os quais, por serem estáticos, não possibilitam a interação com o desenho. O que difere numa atividade com os recursos do ambiente computacional é, de fato, a possibilidade de movimentação dos objetos, sendo que, a partir disso, algumas hipóteses podem ser levantadas, como: após a movimentação a construção permanece com as mesmas características? Um movimento simples altera todas as características? Estas são hipóteses, dentre várias outras, que são possíveis indagar diante principalmente das tomadas de decisão a fim de perceber as suas regularidades.

semiótico e, de outro lado, pela *referência* do objeto representado. (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 467).

Nesse contexto, o GeoGebra é um *software* matemático que reúne dentre outros enfoques matemáticos, elementos da Geometria e da Álgebra. Segundo o seu manual, disponível na *web site* do mesmo, este foi desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner com o objetivo primeiro de ser empregado principalmente no ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas de Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica. O referido ambiente computacional, como dito anteriormente, reúne as características que competem a um *software* de Geometria Dinâmica, permitindo construir diversos objetos como vetores, segmentos, pontos, secções cônicas, gráficos de funções, retas, os quais podem ser facilmente modificados de forma dinâmica. Essa é uma das características deste ambiente que possui grande relevância para este estudo, haja vista que, com esta contribuição, o aluno pode observar o comportamento das funções trigonométricas, por exemplo, ponto a ponto.

Quanto à sua interface gráfica, o GeoGebra fornece três janelas diferentes: a Numérica ou Algébrica, a Gráfica e a folha de cálculo. Essas diferentes opções de janelas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (por exemplo: pontos, gráficos de funções), algebricamente (por exemplo: coordenadas de pontos, equações) além das células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se de maneira automática às mudanças realizadas em qualquer uma delas independente da forma como esses objetos foram inicialmente construídos. Essa potencialidade pode ser evidenciada com uma das mais suficientes e necessárias para a temática deste projeto, visto que, segundo Duval (1995), o processo de coordenação entre dois ou mais registros de representação de um dado objeto favorece a abstração de conhecimentos, o que, aqui, consiste em um dos objetivos desta pesquisa: o favorecimento da aprendizagem de conceitos de Trigonometria.

Abordagem dos tópicos de Trigonometria em livros didáticos

Inicialmente, consultando o que temos de jurídico acerca do livro didático, verificamos que a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) favorece para que o livro suscite temas transversais quando trabalhado, a exemplo da cidadania e da ética; enfim, favorecendo para que os professores formem não apenas intelectuais em dada área do conhecimento, mas que antes de tudo formem cidadãos. Ao se posicionar sobre o livro didático, a LDB sublinha que “o livro didático deve contribuir para a construção da ética necessária ao convívio social democrático, o que o obriga ao respeito, a liberdade e ao apreço à tolerância” (BRASIL, 1998). Com base nesses princípios, a obra didática deve oferecer aos professores liberdade de

escolha e espaço para que possam agregar ao seu trabalho outros instrumentos. Entende-se que a prática do professor não deve se respaldar apenas no uso do livro didático. Contudo, esse livro deve contribuir na organização da prática docente onde este encontre sugestões de aprofundamento e proposições metodológicas coerentes com as concepções pedagógicas e com o projeto político-pedagógico desenvolvido pela escola.

De um lado, muitas pesquisas no mundo acadêmico fascinadas por mudanças frequentes apontam que a Tecnologia Educacional vem exercendo um papel primordial na Educação. Esse exercício demanda do educador estar cada vez mais atento na busca de métodos alternativos para melhor atender seus alunos. Nesse atendimento, o planejamento e a implementação de atividades acadêmicas que visam à utilização das novas tecnologias pelos alunos são alguns dos desafios para o professor/educador. Por outro lado, uma das práticas desse profissional predominante no referido mundo é a busca por referências bibliográficas de excelência para bem servir a produção, bem como a reprodução de conhecimentos no processo ensino/aprendizagem.

Nesse sentido buscamos as considerações do atual PNLD sobre a escolha do livro didático. Em 2008, foi feita a escolha dos livros didáticos de Matemática, onde o PNLD divulgou o edital que estabelecia as regras para a inscrição de coleções para posterior análise. Este foi publicado no Diário Oficial da União e disponibilizado no site do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação) na Internet. Ele também determinava o prazo para a apresentação das obras pelas empresas detentoras de direitos autorais. Para analisar se estas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, é realizada uma triagem pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. A SEB escolhe os especialistas para analisar as obras, conforme critérios divulgados no edital. Os especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos. Este guia contém sínteses das obras de Matemática avaliadas e aprovadas no processo de seleção do PNLD, que podem ser escolhidas pelos professores, como material de apoio à prática pedagógica. Os livros didáticos passam por um processo democrático de escolha, com base no guia do livro didático. Assim, de acordo com PNLEM (2008), os Diretores e Professores devem analisar e escolher tais livros que devem ser utilizados em sua escola. Enfim, destacamos a importância da análise de livros didáticos sendo que esta possibilita o acesso aos elementos característicos da relação institucional com o objeto do ensino visado, bem como as exigências institucionais e as organizações propostas em torno desse objeto. Para tanto evidenciamos algumas organizações didáticas, as quais

Henriques, Nagamine e Nagamine (2012, p. 1272) denominam de estruturas organizacionais. São três:

“Estrutura organizacional *global* do livro didático – trata-se da organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação de todos os tópicos ou assuntos por capítulos propostos no livro em questão, destacando a quantidade de seções e das páginas ocupadas por cada seção no livro. Estrutura organizacional *regional* do livro didático – refere-se à organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação das seções, título das seções que compõem um tópico ou capítulo destacado na organização global do livro, revelando (se possível) a quantidade de Definições, Teoremas, Fórmulas, Exemplos (que são exercícios resolvidos), Exercícios propostos (que são exercícios não resolvidos, encontrados geralmente no final da sessão ou capítulo), e das páginas ocupadas pela seção. Estrutura organizacional *local* do livro didático – refere-se à organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação das subseções, título das subseções que compõem um tópico ou uma sessão destacada na organização regional do livro, revelando (se possível) a quantidade de Definições, Teoremas, Fórmulas, Exemplos (que são exercícios resolvidos), Exercícios propostos (que são exercícios não resolvidos, encontrados geralmente no final da subseção, sessão ou capítulo), e das páginas ocupadas pela subseção.” (HENRIQUES, NAGAMINE, NAGAMINE, 2012, p. 1272)

Como relatado previamente, o livro didático escolhido foi o exemplar destinado ao 9º Ano do Ensino Fundamental II da Educação Básica, que compõe a coleção Tudo é Matemática, obra de Luiz Roberto Dante, famoso por publicações em Educação Matemática. Algumas características nos motivaram para a escolha deste livro. Há cinco anos, este exemplar faz-se presente do Guia Nacional do Livro Didático proposto pelo MEC e elaborado pelo PNLD. A Editora Ática, responsável pela editoração e impressão deste exemplar, ocupa o segundo lugar em solicitações de livros de Matemática, segundo o anuário estatístico do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação). Com isso, acabamos por optar em analisar este exemplar e concluímos que o livro perfaz um total de 10 capítulos distribuídos em 388 páginas.

Algumas informações da estrutura organizacional global são notáveis: cada capítulo é dividido, em média, em 8 seções, e no máximo 11; para cada capítulo há uma seção fixa destinada à Introdução, com um exemplo que contextualiza o conteúdo a ser abordado. Assim a organização por capítulo, ao longo do livro, é distribuída da seguinte forma: Introdução, Definições, Exemplos e Exercícios. Não há indicação quanto ao nível dos exercícios, no entanto, ao longo dos capítulos são disponibilizados desafios sumários. Em outras tarefas é recorrente o símbolo de uma calculadora, indicando a possibilidade de uso de alguma tecnologia para a resolução desta. Ao final de cada capítulo é ofertada uma revisão cumulativa, onde são apresentadas algumas tarefas mais complexas. Com isso, acabamos por

perceber que a obra segue a Organização Didática Clássica, onde o estudante é guiado a partir de situações mais simples para as mais complexas (tarefas emblemáticas).

Da estrutura da organização global destacamos o capítulo 8, destinado aos tópicos referentes à Introdução à Trigonometria, a fim de esboçar o que denominamos anteriormente de Organização Didática Regional, delineando as quantidades de Definições, Fórmulas, Exemplos, Exercícios, Desafios e Páginas, além das seções e os títulos das seções contidas no capítulo 8 (vide Tabela 1). Dos dados coletados e distribuídos na Tabela 1, observamos que cada seção é concluída com um conjunto de exercícios propostos, sendo estes às vezes divididos em blocos (implicitamente por pacotes). Ao final do livro as respostas destes são apresentadas de forma sumária. Depois de analisadas as tarefas, bem como as técnicas envolvidas no processo de resolução de cada uma delas, concluimos que a disposição destas favorece a determinação de um *mimetismo* durante a realização das mesmas. Assim, como de uma tarefa para outra o aluno acaba “imitando” a técnica para resolução, culminamos no que Brousseau (1998) denominou de *efeito topázio*. Durante a prática pedagógica da matemática podemos observar certas situações em que o aluno sente-se bloqueado diante da dificuldade momentânea de resolver um problema. Diante disso, o professor pode ser levado a tentar acelerar a aprendizagem, antecipando o resultado que deveria ser alcançado pelo esforço do próprio aluno. Esse tipo de situação é bem característico do ensino tradicional da matemática, na qual, o professor, indevidamente, toma para si uma parte essencial da tarefa de compreensão do problema em questão. O que deveria ser resultado do esforço do aluno passa a ser visto como uma tentativa de transferência de conhecimento.

Tabela 1 – Organização Didática Regional do livro Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

CAPÍTULO 8 – INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA	Seção	Título da Seção	Def.	For.	Exm.	Exe.	Des.	Pag.
	8.1	Introdução	-	-	-	-	-	2
	8.2	Índice de Subida	1	1	-	3	-	1
	8.3	As Razões Trigonômétricas	6	7	1	11	2	4
	8.4	Relações entre Seno, Cosseno e Tangente	3	3	-	7	1	2
	8.5	Razões Trigonômétricas para Ângulos de 30°, 45° e 60°	1	-	2	9	-	2
	8.6	A Tabela das Razões Trigonômétricas	1	-	-	12	-	4
	8.7	Relações Trigonômétricas em Um Triângulo Qualquer	7	7	4	16	-	6
	8.8	Uso das relações Trigonômétricas em Polígonos Regulares Inscritos em uma Circunferência	11	6	1	13	-	4
	8.9	Revisão Cumulativa	-	-	-	16	-	2
	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-
Total			30	24	8	87	3	27

Def.: Definições; **For.:** Fórmulas; **Exm.:** Exemplos; **Exe.:** Exercícios; **Des.:** Desafios; **Pag.:** Páginas.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Dessa forma, depois de analisarmos a disposição dos conteúdos de Trigonometria regionalmente, procederemos com a análise da estrutura organizacional local, a fim de explicitar o *habitat*⁶, ou seja, o lugar de vida, de um dos tópicos desse eixo temático que nos interessa, de fato. Da Tabela 1, destacamos a seção 8.3, destinada à abordagem das razões trigonométricas, resultando assim na Tabela 2 reservada para a análise local.

Tabela 2 – Organização Didática Local do livro Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

Seção	Título da Seção	Def.	For.	Exm.	Exe.	Des.	Pag.
8.3	As Razões Trigonômétricas	6	7	1	11	2	4

Def.: Definições; **For.:** Fórmulas; **Exm.:** Exemplos; **Exe.:** Exercícios; **Des.:** Desafios; **Pag.:** Páginas.

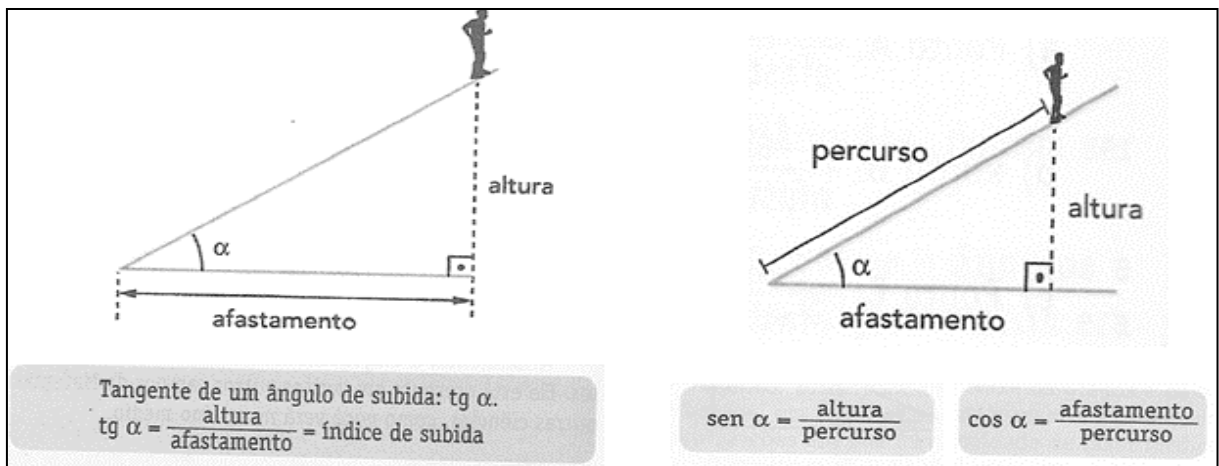
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Das informações coletadas para a análise local concluímos que o *habitat* das razões trigonométricas neste exemplar contém 6 definições, 7 fórmulas, 1 exemplo, 11 exercícios, 2 desafios todos distribuídos em 4 páginas. Analisamos particularmente a abordagem proposta

⁶ Chevallard (1992) define *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas.

pelo autor no que se refere ao estudo do eixo temático destinado à Trigonometria destacado acima. O conteúdo, assim como em todas as outras seções, é introduzido por meio de uma *analogia*. No caso particular das razões trigonométricas é utilizada uma mediação com o modelo de uma rampa. Destacamos o registro figural da situação abaixo:

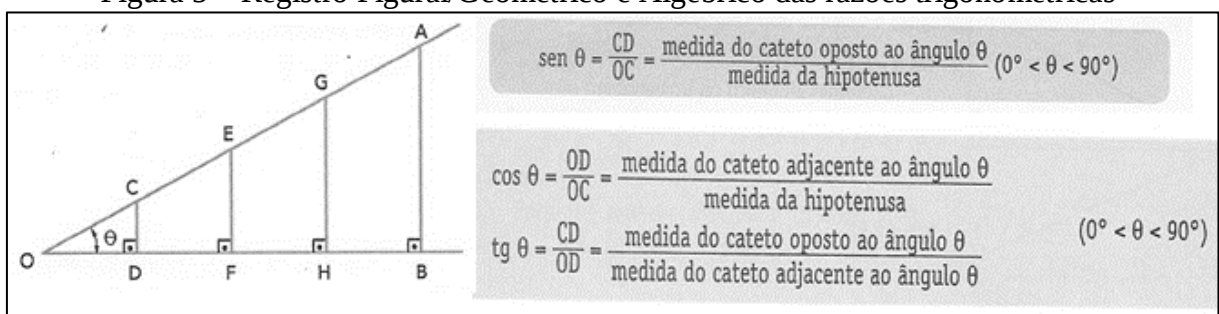
Figura 4 – Registro Figural/Geométrico e Algébrico das razões trigonométricas



Fonte: Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

Note que, no registro acima, e na forma como é apresentado, os conceitos de *cateto oposto*, *cateto adjacente* e hipotenusa são omissos. Após a abordagem introdutória e utilizando a analogia acima, o autor apresenta formalmente estes conceitos, fazendo uso da semelhança de triângulos. Observe na Figura 5:

Figura 5 – Registro Figural/Geométrico e Algébrico das razões trigonométricas



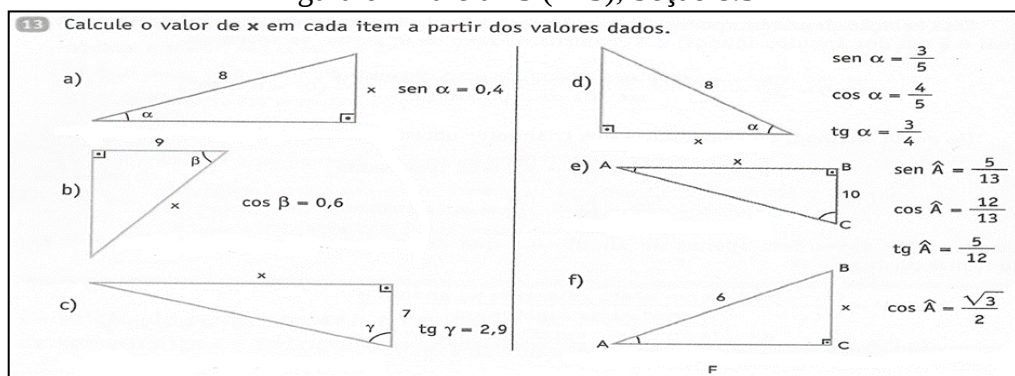
Fonte: Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

A partir de então, os elementos do triângulo retângulo são apresentados de forma a substituir os conceitos já abstraídos de altura, percurso e afastamento. Durante toda a obra, o autor prima por utilizar deste tipo de recurso análogo a fim de atingir o que Vygotsky (1978) denominou de Zona de Desenvolvimento Proximal ou *Zone of Proximal Development* (ZDP), ou seja, utilizar-se de analogias e mobilizar os conhecimentos já adquiridos pelo aluno a fim de abstrair novos conceitos. No entanto, questionamo-nos quanto ao exemplo utilizado e a

forma como estes conceitos serão trabalhados pelo professor. Ressaltamos então o cuidado com o uso rebuscado de analogias sendo que estas podem a longo prazo reduzir os significados.

Depois de analisada a forma como o conteúdo é transmitido ao longo da seção 8.3, verificamos então a disposição das tarefas nesta mesma localidade. Como relatado anteriormente, ao longo do livro, os exercícios são distribuídos em blocos, sendo que estes necessitam apenas de uma única técnica para resolução. Destacamos um conjunto de subtarefas da seção em análise e averiguamos que o mesmo ocorre. Vide Figura 6:

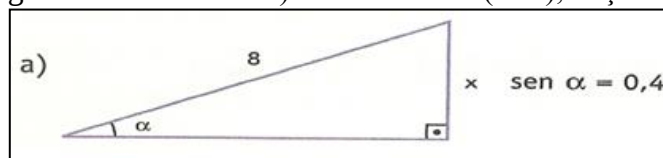
Figura 6 – Tarefa 13 (T13), Seção 8.3



Fonte: Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

Assim, como o *habitat* das razões trigonométricas contém 11 tarefas, concluímos que estas acabam por alimentar o *nicho figural* deste eixo temático correspondente à Trigonometria. Como a modelização do cálculo não é apresentada, elaboramos em ambiente papel/lápis uma proposta para esta considerando então as noções de Registro de Representações Semióticas de Duval (1993), a fim de caracterizar a coordenação entre os registros de representação necessários para esta modelização. Espera-se do aluno, durante este processo, a mobilização entre os registros algébrico, analítico bem como a língua materna. Optamos para este modelo pela subtarefa “a)” da T13, como na figura abaixo.

Figura 7 – Subtarefa “a)” da Tarefa 13 (T13), Seção 8.3



Fonte: Tudo é Matemática, 9º Ano, DANTE, Editora Ática

Consideramos então, neste processo, que o aluno detenha os conhecimentos mínimos referentes à regra de três simples, simplificação de frações e que saiba identificar os

elementos do triângulo retângulo a fim de aplicá-los na fórmula apresentada na Figura 5. Observe:

Figura 8 – Modelização do Cálculo, Subtarefa “a)” da Tarefa 13 (T13), Seção 8.3

Partindo da relação que, sendo α um ângulo agudo, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Medida do Cateto Oposto}}{\text{Medida da Hipotenusa}} = \frac{CO}{H}$$

Sabendo que $H = 8$ e que $CO = x$, segue que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{CO}{H} = \frac{x}{8} \quad (i)$$

Como $\operatorname{sen} \alpha = 0,4$, (dados da questão), temos substituindo em (i):

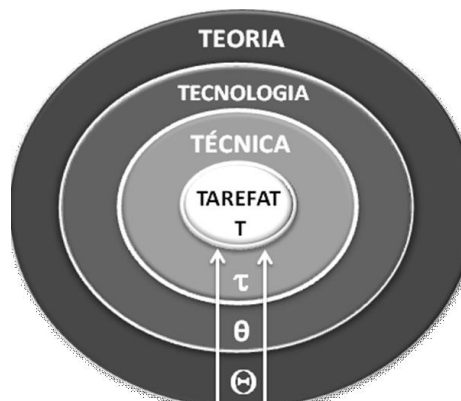
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{8}$$

$$0,4 = \frac{x}{8}, \text{ Observando que } 0,4 = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{32}{10} \Rightarrow x = 3,2.$$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A partir destas breves apreciações quanto às estruturas organizacionais do livro didático, algumas considerações são necessárias. Na maioria das tarefas propostas, o uso de palavras como *encontre*, *calcule* e *ache* é relevante. Há solicitação, por exemplo, do cálculo do “x”, o que pode causar dúvida interpretação por parte do aluno. As respostas, ao final do livro, são ofertadas de forma “seca”, sem ressalva alguma a respeito da forma como proceder para a resolução de dada tarefa. As tarefas denominadas “Desafios”, apesar de possuírem este nome, acabam por serem resolvidas utilizando a mesma técnica das tarefas ditas não-emblemáticas. Tanto a organização global quanto a organização local revelam aquilo que Chevallard (1992) denominou de *praxeologia usual*, que parte da apresentação teórica dos conteúdos, do bloco *logôs* para o bloco *praxe*. Note o direcionamento das setas na Figura 9 abaixo:

Figura 9 – Praxeologia Usual



Fonte: Henriques, Nagamine e Nagamine (2012, p. 1285)

Logo, depois de verificadas as disposições dos conteúdos de Trigonometria no livro didático escolhido, utilizaremos tais informações para a construção do dispositivo experimental, que seguirá o modelo inverso à *praxeologia usual* apresentado acima, ou seja, do bloco *praxes* para o bloco *logôs*, para a aplicação em uma dada instituição do Ensino Fundamental II da Educação Básica. Porém, antes, verificamos as possibilidades de resolução para algumas das tarefas apresentadas na estrutura organizacional local do livro analisado. Assim, segue a Sequência Didática que obtivemos como resultado nesta pesquisa.

Dispositivo Experimental para Aplicação (Sequência Didática (SD))

Uma SD tangencia fortemente o conceito de *análise institucional* em torno dos objetos de estudo nela envolvidos, afirmam Reis Júnior e Henriques (2014). Ela deve abarcar sujeitos (como estudantes, professores etc.) de uma dada instituição de referência.

Sequência didática, o que é?

Entendendo uma SD como um dos aspectos da Engenharia Didática⁷, Henriques, Palmeira e Oliveira (2013, p. 3) propõem a seguinte definição:

Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [constituente de uma praxeologia].

As análises matemáticas/didáticas destacam as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados em cada situação, pré-requisitos e competências. Estes são, portanto, parte da *análise a priori* e desenvolvem-se de acordo com a *praxeologia de referência* do objeto de estudo.

Organização de uma Sequência Didática

Consideramos cinco momentos essenciais no desenvolvimento de uma SD: *análise preliminar* (ou *institucional*), *organização do dispositivo experimental (DE)*⁸, *análise a priori*, *aplicação da SD* e *análise a posteriori*.

⁷ A *engenharia didática*, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na *concepção, realização, observação e análise sequencial de atividades de ensino* (ARTIGUE, 1988).

⁸ É o instrumento de análise de práticas institucionais em torno do objeto de estudo utilizado pelo pesquisador.

1. Na *análise institucional* a SD é idealizada com base nos objetos de estudo reconhecidos na instituição de referência.
2. Na *organização do dispositivo experimental* (DE) consideramos as tarefas correspondentes à praxeologia destacada na análise institucional.
3. Na *análise a priori* estudamos as condições de realização, da caracterização dos objetivos específicos e da explicitação das técnicas institucionais de realização de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências.
4. Na *aplicação da SD* observamos as relações pessoais com o objeto de estudo, com poucas ou nenhuma intervenção do pesquisador. É neste momento que constituímos um protocolo experimental⁹ a partir das práticas efetivas dos alunos/estudantes.
5. Na *análise a posteriori* analisamos as práticas institucionais dos sujeitos envolvidos na pesquisa, com base no protocolo experimental.

O confronto entre as análises a priori e a posteriori deve permitir responder algumas questões de pesquisa, reflexões sobre o papel da instituição de referência no aprendizado dos sujeitos envolvidos na pesquisa, bem como contribuir na realização de outras pesquisas. A evolução no DE deve permitir acompanhar a aprendizagem dos sujeitos **X** envolvidos, de uma tarefa para outra, com intenções a um dado objeto **O**, na mesma sessão, e/ou de uma tarefa para as outras de sessões distintas, delineada a relação **R(X,O)**. A Tabela 3 resume a organização do DE duma SD. Nesta organização, cada **ki** representa o número de tarefas que compõem cada uma das P sessões da SD.

Tabela 3 - Organização de um dispositivo experimental

Organização do DE duma Sequência Didática						
Sessão I	→	Sessão II	→	...	→	Sessão P
T1		T1		...		T1
T2		T2		...		T2
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
Tk ₁		Tk ₂		...		Tk _p

Condições de criação e evolução de R(X,O)

⁹ O protocolo experimental é um documento construído pelo pesquisador durante as investigações. Esse documento é constituído de manuscritos de alunos/estudantes, filmagens, transcrições de entrevistas faladas, entrevistas escritas, arquivos de computadores etc. A construção do protocolo experimental é essencial em pesquisas educacionais e deve constar como anexo na versão final do manuscrito da pesquisa.

Desta tabela, surge outra (Tabela 4) que resume a organização de uma sessão. A sequência que analisaremos é baseada nesta organização, característica de uma sequência didática unitária (SDU). Analisamos os elementos de controle, das condições de realização e evolução de relações observáveis, com base no modelo praxeológico da TAD.

Tabela 4 - Organização de uma sessão experimental

ORGANIZAÇÃO DE UMA SESSÃO EXPERIMENTAL	
Sessão I	Objetivos da Sessão I
T1	<u>Objetivos específicos da T1</u> Apresentação da análise <i>a priori</i> . Destacar variáveis didáticas de situações; estratégias de resolução, corretas ou não da tarefa com as respectivas resoluções; escolha de possíveis estratégias pelos estudantes; observação dessas estratégias pertinentes na resolução do estudante com o objetivo da pesquisa.
T2	
⋮	
T _{k₁}	

Sequência Didática para abordagem dos tópicos de Trigonometria no *software* GeoGebra

Na análise institucional sobre o estudo da Trigonometria destaca-se certo tipo de tarefas no bloco *teórico-tecnológico* [θ/Θ] propostas frequentemente aos alunos/estudantes ao final de cada seção. A maioria delas é realizada com aplicações imediatas das técnicas apresentadas no bloco *logôs*. O dispositivo experimental elaborado durante a pesquisa é constituído de 5 Tarefas “T”, compostas de subtarefas “t”, que versam sobre os conteúdos relativos à Introdução à Trigonometria utilizando o *software* GeoGebra. Esse DE integra os conhecimentos relacionados a estes conteúdos uma vez que são evidenciados os conceitos do bloco *logôs* [θ/Θ] no qual a Tarefa é construída e em seguida as técnicas de realização (bloco *praxes* [T/τ]). A prática no ambiente computacional vai permitir mobilizar esses conceitos de forma dinâmica.

Dispositivo Experimental

O DE que apresentamos a seguir é organizado com doze tarefas, T1, T2, ..., T5, característica de uma SDU e poderá ser proposta aos estudantes de uma instituição de aplicação da EBa numa única sessão.

GPEMAC	Dispositivo experimental para análise de práticas institucionais sobre estudo de Trigonometria com auxílio do software GeoGebra.		 UESC
	Professor da turma (opcional):		
	Nome do aluno (opcional):	Data: / /2013	
	OBSERVAÇÃO: em cada tarefa abaixo, use os conceitos de Trigonometria correspondentes, justificando as estratégias de resolução.		
SESSÃO UNITÁRIA			
T ₁ .	Verificar o Teorema de Pitágoras utilizando as ferramentas do <i>software</i> GeoGebra.		
	t _{1.1}	Construir um triângulo retângulo usando duas retas perpendiculares como suporte tal que a intersecção entre elas seja um de seus vértices.	
	t _{1.2}	Medir o comprimento dos lados do triângulo construído em t1 .	
	t _{1.3}	Construir três quadrados a partir de cada um dos lados do triângulo retângulo construído em t1 .	
	t _{1.4}	Mover um dos vértices do triângulo e comparar as áreas dos quadrados. (Anotar suas observações.	
T ₂ .	Identificar alguns elementos do triângulo retângulo.		
	t _{2.1}	Construir um triângulo retângulo usando duas retas perpendiculares como suporte tal que a intersecção entre elas seja um de seus vértices.	
	t _{2.2}	Medir os ângulos internos do triângulo retângulo construído em t1 .	
	t _{2.3}	Identificar os ângulos agudos, os catetos opostos e adjacentes em relação a cada ângulo agudo e a hipotenusa.	
	t _{2.4}	Mover um dos vértices de maneira que os ângulos agudos se alterem. (Anotar suas observações.)	
	t _{2.5}	Calcular a razão entre as medidas dos segmentos do triângulo retângulo construído em t1 dois a dois. Nomeá-los da seguinte forma: X = “medida do cateto oposto dividido pela medida da hipotenusa”; Y = “medida do cateto adjacente dividido pela medida da hipotenusa”; Z = “medida do cateto oposto dividido pela medida da hipotenusa”	
	t _{2.6}	Mover o vértice do ângulo em relação ao qual foram calculadas as razões alterando-o para valores entre 0° e 90°. (Anotar suas observações.)	
T ₃ .	Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (45°).		
	t _{3.1}	Construir um quadrado e traçar uma de suas diagonais.	
	t _{3.2}	Escolher um dos triângulos obtidos e medir os ângulos internos.	
	t _{3.3}	Identificar o cateto adjacente e o cateto oposto em relação aos ângulos agudos medidos na tarefa t2 .	
	t _{3.4}	Calcular, em relação a um dos ângulos agudos, por meio da razão entre as medidas dos segmentos, a medida do seno, do cosseno e da tangente deste ângulo.	
	t _{3.5}	Com o auxílio de uma calculadora calcular um valor aproximado para $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comparar com as razões obtidas na tarefa t4. (Anotar suas observações.)	
T ₄ .	Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (30° e 60°).		
	t _{4.1}	Construir um triângulo equilátero e traçar em relação a um de seus vértices a sua altura.	
	t _{4.2}	Escolher um dos triângulos obtidos e medir os ângulos internos.	
	t _{4.3}	Em relação ao ângulo de 30° calcular, por meio da razão entre as medidas dos segmentos, a medida do seno, do cosseno e da tangente deste ângulo.	
	t _{4.4}	Em relação ao ângulo de 60° calcular, por meio da razão entre as medidas dos segmentos, a medida do seno, do cosseno e da tangente deste ângulo.	
	t _{4.5}	Com o auxílio de uma calculadora calcular um valor aproximado para $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\sqrt{3}$. Comparar com as razões obtidas na tarefa t4 . (Anotar suas observações.)	

A seguir passaremos à realização da análise a priori e sequencial de cada tarefa proposta neste dispositivo, com base na *praxeologia de referência* proposta para o ensino de Trigonometria.

Análise a priori do Dispositivo Experimental

Como vimos na organização de uma SD, nessa parte estudamos as condições de realização, caracterização dos objetivos específicos e das técnicas institucionais de realização de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências. A proposta da nossa pesquisa nos limitou a apresentar os objetivos específicos e as técnicas de resolução.

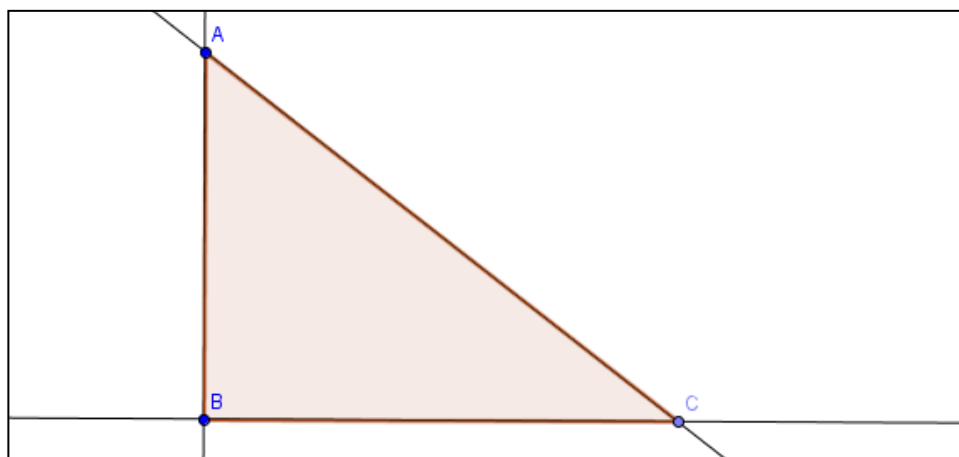
Análise a priori de T_1

A tarefa T_1 possui o seguinte enunciado:

T_1.	Verificar o Teorema de Pitágoras utilizando as ferramentas do <i>software</i> GeoGebra.
--------------------------	---

O objetivo de T_1 consiste em verificar o Teorema de Pitágoras por meio da comparação entre as áreas de quadrados de lados de comprimentos correspondentes ao comprimento dos lados de um triângulo retângulo. Como solicitado em $t_{1,1}$, a construção do triângulo retângulo no *software* GeoGebra requer a utilização de retas perpendiculares bem como seus pontos de intersecção. Para isso, utiliza-se a ferramenta “**Retas Perpendiculares**” e em seguida “**Ponto de Intersecção**”. Para completar o triângulo retângulo traça-se um “**Segmento Definido por Dois Pontos**”. (Cf. Figura 10).

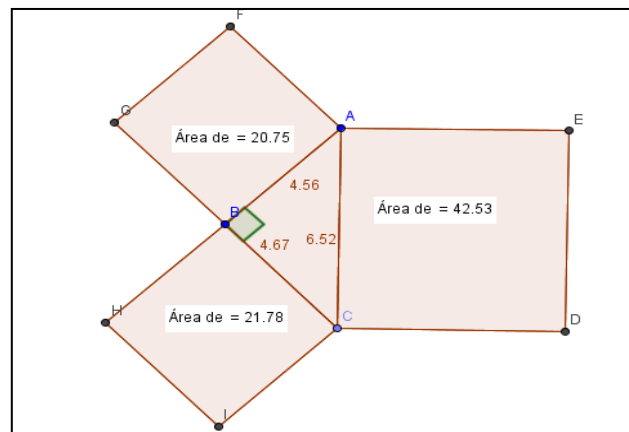
Figura 10 – Construção T_1



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor.

Em $t_{1,2}$, é solicitado o comprimento dos lados do triângulo construído em $t_{1,1}$. Utiliza-se então a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” clicando sobre o segmento desejado. A sub tarefa $t_{1,3}$ solicita a construção de quadrados tendo como lado suporte o lado do triângulo construído em $t_{1,1}$. Assim, ativando a ferramenta “**Polígono Regular**” e clicando nos vértices do triângulo dois a dois, construímos os quadrados desejados. Para mensurar a área destes polígonos usa-se a ferramenta “**Área**” clicando sobre os quadrados. (Cf. Figura 11).

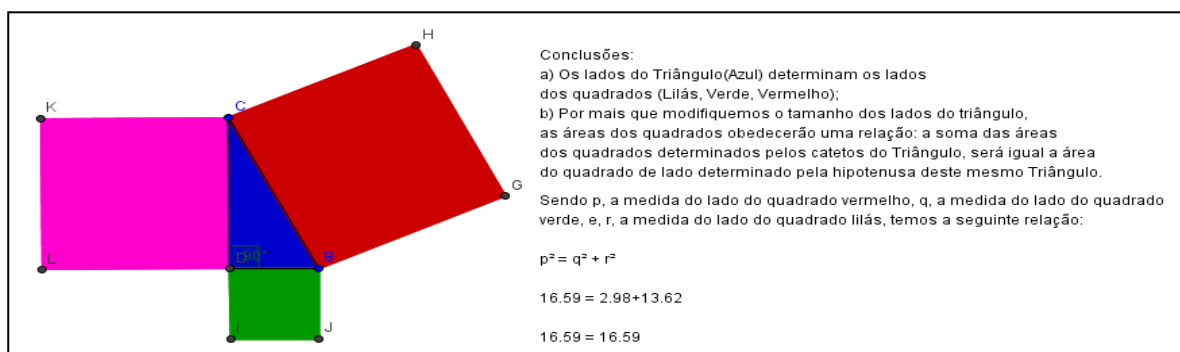
Figura 11 – Construção T_1



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor.

Após a execução das subtarefas de T_1 alguns questionamentos podem ser levantados, como por exemplo, verificar o que acontece com a soma das áreas dos quadrados que possuem lados suportes iguais aos dos catetos em relação à área do quadrado que possui lado suporte igual ao da hipotenusa, quando os vértices do triângulo são deslocados. Pode sugerir também a construção desta mesma situação, no entanto, utilizando um triângulo não retângulo, e enfim verificar se a condição do Teorema de Pitágoras se aplica. Segue abaixo a Figura 12 com a construção finalizada de T_1 .

Figura 12– Construção T_1



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Passemos ao estudo da tarefa T_2 .

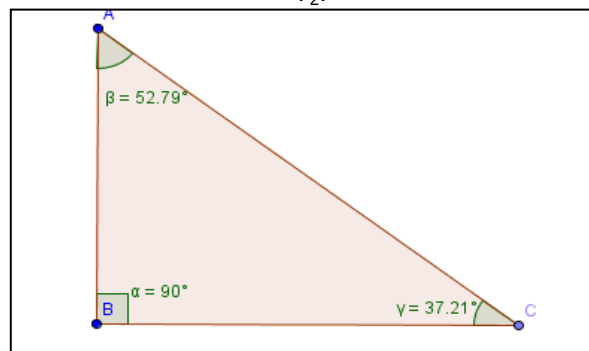
Análise *a priori* de T_2

A tarefa T_2 apresenta o seguinte enunciado:

T_2.	Identificar alguns elementos do triângulo retângulo.
--------------------------	--

O objetivo desta tarefa é, a partir das ferramentas do *software* GeoGebra, construir um triângulo retângulo e, a partir dele, enumerar seus elementos. A subtarefa $t_{2,1}$, assim como a $t_{1,1}$, resume-se em construir um triângulo retângulo a partir de retas perpendiculares suporte. Para isso, utiliza-se a ferramenta “**Retas Perpendiculares**” e em seguida “**Ponto de Intersecção**”. Para completar o triângulo retângulo traça-se um “**Segmento Definido por Dois Pontos**” (Cf. Figura 10). Com a subtarefa $t_{2,2}$ objetiva-se destacar os ângulos internos referente a cada vértice do triângulo construído na subtarefa anterior. Para isso, recorreremos à ferramenta “**Ângulo**”, e, no sentido horário, clicamos nos vértices do triângulo. Note que o ângulo será nomeado com letras do alfabeto grego, iniciando pela letra *alfa*, assim como na Figura 13, e caso o seu valor não apareça junto ao seu rótulo, verifique o mesmo na Janela de Álgebra do *software*.

Figura 13 – Construção T_2 .

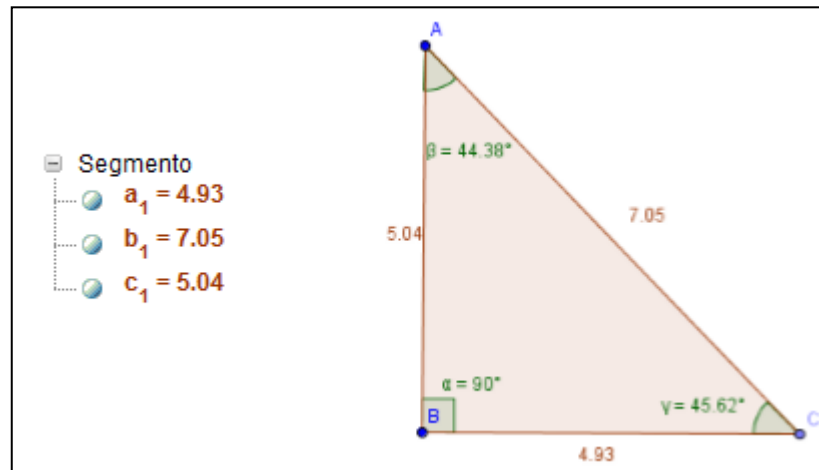


Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

As subtarefas $t_{2,3}$ e $t_{2,4}$ necessitam de conhecimentos a respeito dos conceitos de *ângulo agudo* e *ângulo obtuso*, uma vez que o *software* já apresenta a medida dos ângulos internos em graus. Nesse sentido, com a opção “**Mover**” ativa, ao movimentar um dos vértices do triângulo o aluno poderá observar e constatar as mudanças que ocorrem na medida dos ângulos. Para a subtarefa $t_{2,5}$ recorreremos à Janela de Álgebra (JA) do GeoGebra. Como relatado anteriormente, essa janela permite a visualização da representação algébrica-

numérica dos elementos construídos/manipulados na Janela de Visualização. Então, utilizando a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” clicando sobre o segmento desejado, mensuraremos os comprimentos dos lados do triângulo. Na JA aparecerão as seguintes informações:

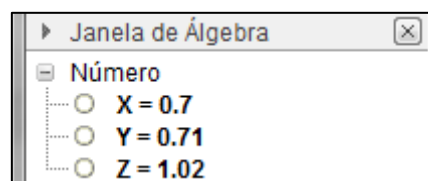
Figura 14 – Construção T₂



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

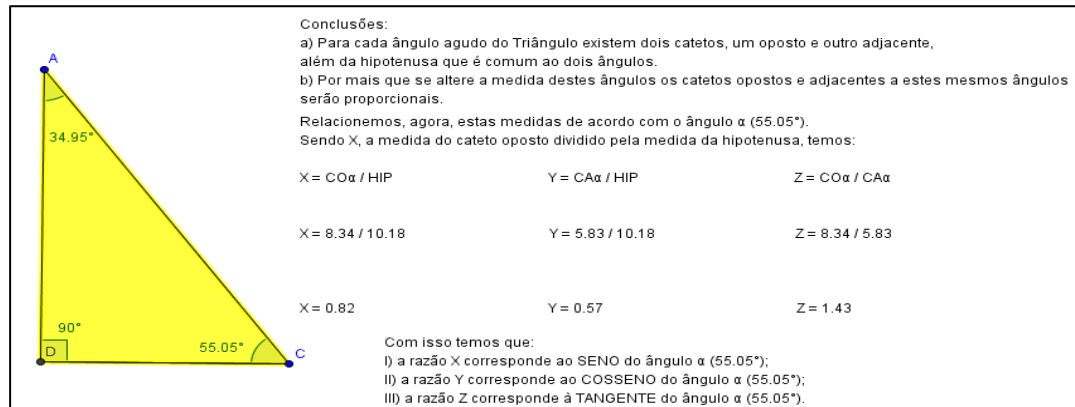
Assim utilizaremos os valores correspondentes às variáveis a_1 , b_1 e c_1 para o cálculo das razões desejadas. No Campo de Entrada (CE) do *software* digitamos, conforme solicita o enunciado da tarefa, as letras X, Y e Z, e para cada uma delas as razões correspondentes. Logo, teremos “ $X=a_1/b_1$ ”, e em seguida apertamos Enter. De forma análoga procedemos para as variáveis Y e Z. Na JA aparecerão as seguintes informações:

Figura 15 – Construção T₂.



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

As razões calculadas correspondem ao ângulo interno relativo ao vértice “A”. Então, ao mover este vértice, cabe ao aluno observar que os valores de X, Y e Z não alteram, por mais que os comprimentos se alterem. Segue abaixo a construção finalizada:

Figura 16 – Construção T₂

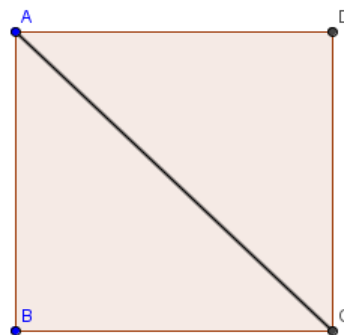
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Análise *a priori* de T₃

A terceira tarefa possui o seguinte enunciado:

T₃. Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (45°).

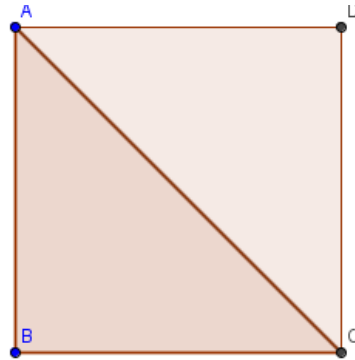
Depois de identificados os elementos do triângulo retângulo passemos ao estudo das razões trigonométricas referentes aos ângulos notáveis. Iniciando com a discussão acerca do ângulo de 45°, utilizaremos o quadrado como suporte para as demais construções. A sub tarefa **t_{3.1}** solicita a construção desse polígono regular e em seguida uma de suas diagonais. Para isso utiliza-se a ferramenta “**Polígono Regular**”, clicando em dois pontos da JV, e clicando em “**Ok**”, para um polígono de 4 lados, na janela de diálogo exibida pelo *software*. Para traçar uma de suas diagonais ativa-se a ferramenta “**Segmento Definido por Dois Pontos**”, clicando em dois vértices opostos do quadrado. (Cf. Figura 17)

Figura 17 – Construção T₃

Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Com a diagonal traçada, acabamos por delimitar dois triângulos retângulos. Para destacar um desses triângulos ativa-se a ferramenta “**Polígono**” e em seguida clica-se nos três vértices desejados. (Cf. Figura 18)

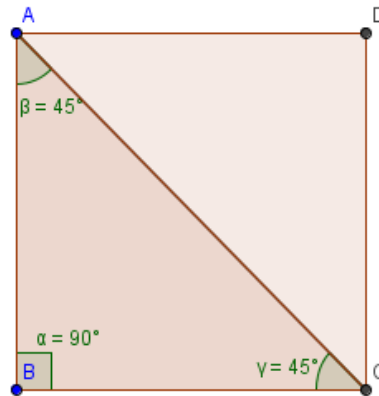
Figura 18 – Construção T_3



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

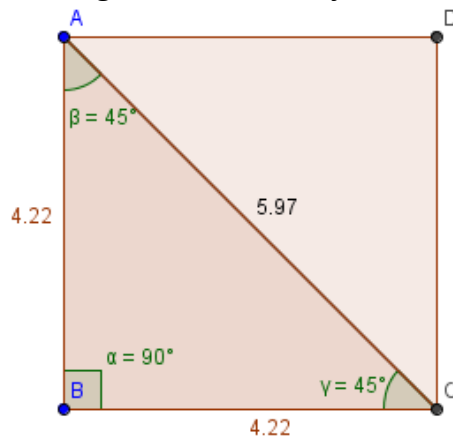
A subtarefa $t_{3,2}$ solicita a marcação dos ângulos internos do triângulo destacado. Para isso, recorreremos à ferramenta “**Ângulo**”, e, no sentido horário, clicamos nos vértices do triângulo. (Cf. Figura 19)

Figura 19 – Construção T_3



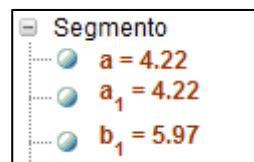
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor.

Como os ângulos agudos são iguais, para atender à subtarefa $t_{3,3}$ o aluno deverá atentar para o fato de que para qualquer ângulo de referência adotado os resultados das razões, em relação aos comprimentos dos lados do triângulo, serão iguais. Para mensurar estes comprimentos, utiliza-se a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” clicando sobre o segmento desejado. (Cf. Figura 20)

Figura 20 – Construção T_3 

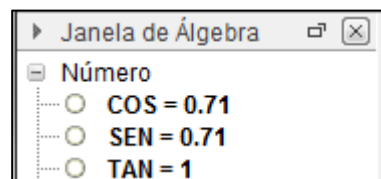
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Na JA aparecerão as seguintes informações:

Figura 21 – Construção T_3 

Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Assim, para a subtarefa $t_{3.4}$, utilizaremos os valores correspondentes às variáveis a , a_1 e b_1 para o cálculo das razões desejadas (note que o aluno deverá correlacionar o cálculo das razões encontradas em T_2 , com os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo analisado). No Campo de Entrada (CE) do *software* digitamos, conforme solicita o enunciado da tarefa, os valores SEN, COS e TAN, e para cada uma delas as razões correspondentes. Logo, teremos “ $SEN=a/b_1$ ”, e em seguida apertamos Enter. De forma análoga procedemos para as variáveis COS e TAN. Na JA aparecerão as seguintes informações:

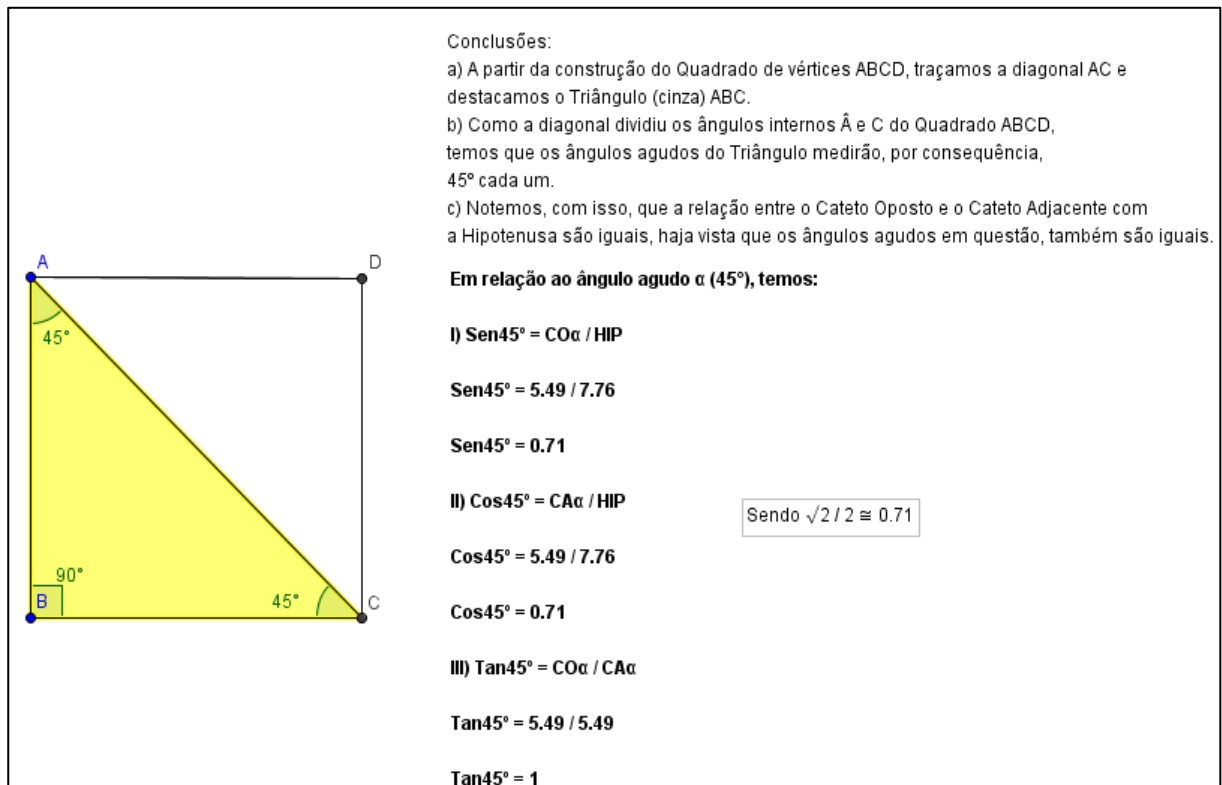
Figura 22 – Construção T_3 

Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Esses valores correspondem aos valores do seno, do cosseno e da tangente para o ângulo de 45° . A última subtarefa ($t_{3.5}$) solicita que seja calculado um valor aproximado para

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ com o auxílio de uma calculadora. Encontrando este valor o aluno poderá comparar com os resultados do seno e do cosseno para o ângulo de 45° . A idéia é perceber que o valor é o mesmo, no entanto $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é encontrado quando utilizamos um quadrado suporte de lado unitário. Segue a construção finalizada:

Figura 23 – Construção T₃



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Análise *a priori* de T₄

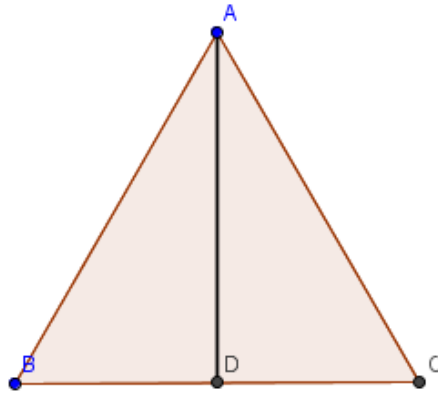
A quarta tarefa apresenta o seguinte enunciado:

T₄.	Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (30° e 60°).
-----------------------	---

Ainda no que se refere às razões trigonométricas para os ângulos notáveis, passemos ao estudo dos ângulos de 30° e 60° , utilizando o triângulo equilátero como suporte para a construção. A subtarefa **t_{4.1}** solicita a construção desse polígono regular e em seguida sua altura em relação a um de seus vértices. Para isso utiliza-se a ferramenta “**Polígono Regular**”, clicando em dois pontos da JV, e clicando em “**Ok**”, para um polígono de 3 lados, na janela de diálogo exibida pelo *software*. Para traçar o segmento referente à altura relativa a um dos

vértices, ativa-se a ferramenta “**Ponto Médio ou Centro**” e clicando nos vértices do segmento oposto ao vértice de referência obtemos os extremos para traçar a altura do triângulo. Com a ferramenta “**Segmento Definido por Dois Pontos**”, clicando no vértice de referência e no outro extremo encontrado, traçamos o segmento desejado. (Cf. Figura 24)

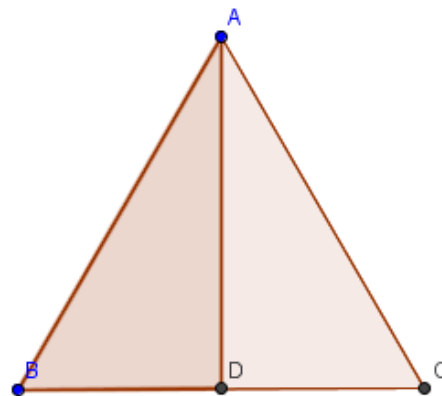
Figura 24 – Construção T_4



Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

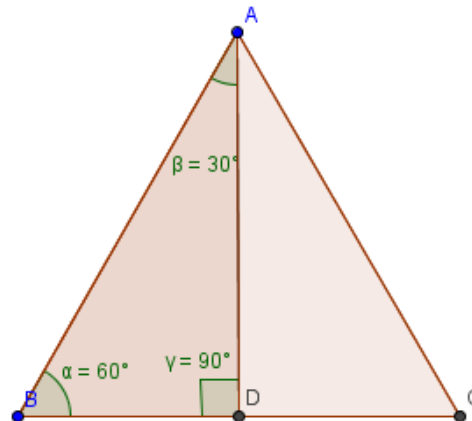
Com a altura traçada, acabamos por delimitar dois triângulos retângulos. Para destacar um desses triângulos ativa-se a ferramenta “**Polígono**” e em seguida clica-se nos três vértices desejados. (Cf. Figura 25)

Figura 25 – Construção T_4



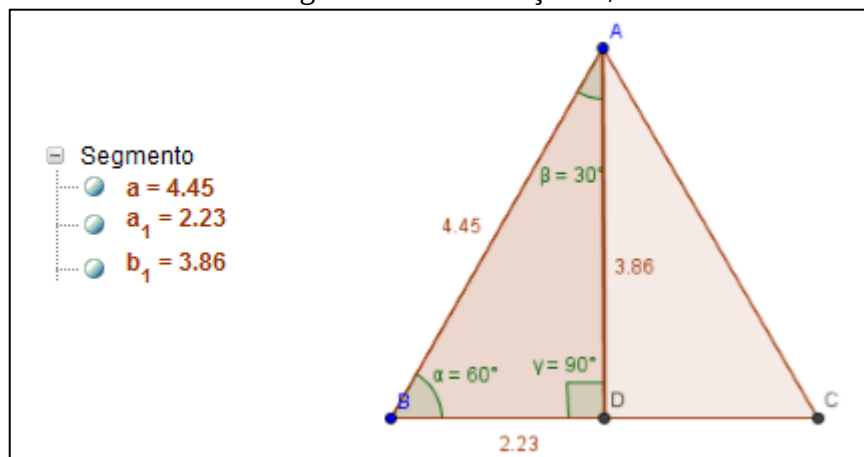
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

A subtarefa $t_{4.3}$ solicita a marcação dos ângulos internos do triângulo destacado. Para isso, recorreremos à ferramenta “**Ângulo**”, e, no sentido horário, clicamos nos vértices do triângulo (Cf. Figura 26)

Figura 26 – Construção T₄

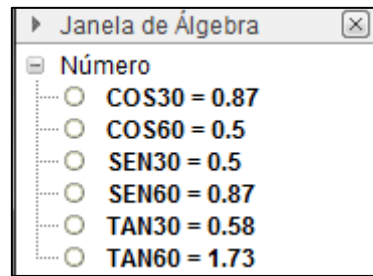
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Na JA temos as seguintes informações:

Figura 27 – Construção T₄

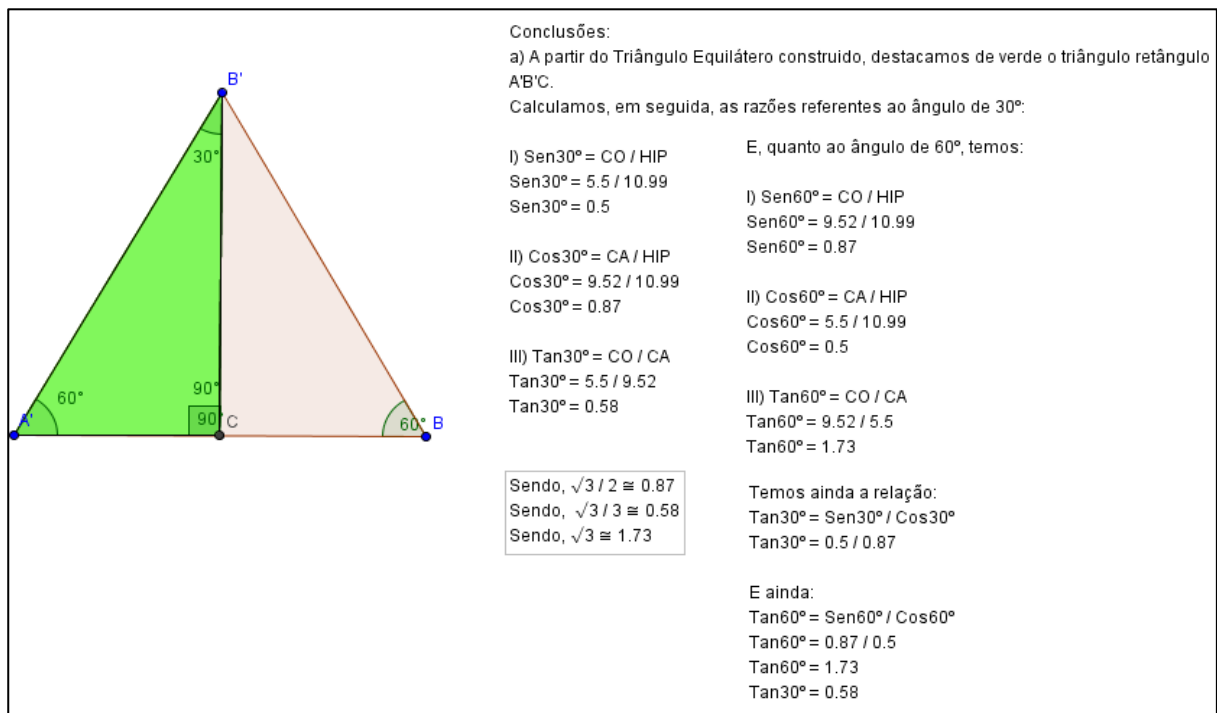
Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Assim, para a subtarefa $t_{3,4}$, utilizaremos os valores correspondentes às variáveis a , a_1 e b_1 para o cálculo das razões desejadas (note que o aluno deverá correlacionar o cálculo das razões encontradas em T₂, com os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo analisado). No Campo de Entrada (CE) do *software* digitamos, conforme solicita o enunciado da tarefa, os valores SEN, COS e TAN, e para cada uma delas as razões correspondentes. Logo, teremos “SEN= a_1/a ”, e em seguida apertamos Enter. De forma análoga procedemos para os valores de COS e TAN para o ângulo de 30°. Para o ângulo de 60° teremos “SEN= b_1/a ”, e para COS e TAN seguimos de forma semelhante, de acordo com a praxeologia proposta para o ensino de razões trigonométricas. Na JA aparecerão as seguintes informações:

Figura 28 – Construção T₄.

Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Esses valores correspondem aos valores do seno, do cosseno e da tangente para os ângulos de 30° e 45°. A última subtarefa (t_{4.5}) solicita que seja calculado um valor aproximado para $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\sqrt{3}$ com o auxílio de uma calculadora. Encontrando estes valores o aluno poderá comparar com os resultados do seno e do cosseno para os ângulos de 30° e 60°. A idéia é perceber que os valores são os mesmos. Segue abaixo a construção finalizada:

Figura 29 – Construção T₄

Fonte: Arquivo Pessoal do Autor

Conclusões

No presente artigo, apresentamos os resultados provenientes da pesquisa denominada Ensino e Aprendizagem da Trigonometria com o auxílio do software GeoGebra. Centramos os esforços na busca por referências sobre o tema e a confecção do que propomos como objetivo geral: a elaboração de uma Sequência Didática (SD) para o ensino de trigonometria

com o GeoGebra. Esta SD, principal resultado desta pesquisa, é composta de um dispositivo experimental (DE) constituído de cinco tarefas que favorecem o ensino de conteúdos matemáticos em ambiente computacional. Para tanto utilizamos os conceitos trigonométricos, os tópicos relativos à introdução à trigonometria como, Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas e círculo trigonométrico. Como instrumento para este processo utilizamos o *software* gratuito GeoGebra, apresentando as ferramentas de construção neste ambiente computacional na análise *a priori* da SD bem como as construções realizadas e construídas durante a pesquisa, sendo estas disponibilizadas na *homepage* do GPEMAC - UESC (Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional) para consulta. Como proposta de pesquisa futura, evidenciamos a necessidade de aplicação desta SD em uma instituição de aplicação da Educação Básica, bem como a análise *a posteriori* dos resultados obtidos. Em suma, esperamos com isso fornecer subsídios para o ensino de trigonometria, bem como a utilização efetiva dos recursos tecnológicos como mediadores no processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

Referências

ARTIGUE, M., **Ingénierie didactique. Recherches en Didactique de Mathématiques**. França, v. 9, no 3, p. 245-308, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble: La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1998.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 9º Ano. São Paulo: Ática, 2009.

DUVAL R., **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, 1995.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple**. Grenoble: UJF, Lab. Leibniz, 2007.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências Teóricas da Didática Francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, p. 51-81, 2007.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A; NAGAMINE, C. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

HENRIQUES, A.; PALMEIRA, E. S.; OLIVEIRA, P. B., **Extensão do Teorema de Pitágoras em três Dimensões: Modelagem de edifícios por paralelepípedos usando Cabri 3D**. In: 16º Encontro de Modelagem Computacional, 4º Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, 3º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - BA - AL - SE, 2013, Ilhéus. Anais do XVI Encontro de Modelagem Computacional, 2013.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple, **Revista Ciência & Educação da UNES**, Bauru (SP), 2016.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In: LESTER, Frank K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (Vol. II, pp. 707-762). Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2007.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H.; BREDÁ, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M. E.; OLIVEIRA, P. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2007.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies** - Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Editions Armand Colin, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in Society** – The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge MA: Harvard University Press, 1978.