

NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DE PERNAMBUCO: um estudo sob o olhar vanhieliano

André Pereira da Costa

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Universidade Federal de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
andre.pcosta@outlook.com

Marcelo Câmara dos Santos

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Universidade Federal de Pernambuco – Pernambuco – Brasil
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Resumo

Este trabalho objetivou verificar os níveis de pensamento geométrico de 300 alunos do Ensino Médio de cinco instituições públicas de Ensino Básico do Estado de Pernambuco, segundo a ótica da teoria de Van-Hiele (1957). Nesse sentido, o instrumento de coleta de dados utilizado foi um teste de sondagem composto por cinco itens relacionados ao conceito de quadriláteros notáveis, que foi aplicado com esses alunos entre os meses de maio e junho de 2014. Aqui discutimos os dados produzidos pelos itens 02, 03, 04 e 05 do teste, voltando nosso olhar para os dois primeiros níveis da teoria vanhieliana, realizando, dessa forma, uma análise qualitativa e quantitativa desses dados. Entre os resultados obtidos, destacamos que a maior parte dos participantes do estudo ainda se encontra no nível básico de pensamento geométrico da teoria de Van-Hiele, no qual o discente reconhece as figuras geométricas somente por meio de sua aparência. Além disso, identificamos um reduzido número de alunos no segundo nível (que corresponde ao reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas propriedades) e no terceiro nível (caracterizado pela ordenação das propriedades das figuras) vanhielianos. Todavia, conforme Van-Hiele (1999), o ideal seria que os alunos, ao concluírem o Ensino Básico, deveriam ser capazes de compreender a função dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva, que corresponde ao quarto nível de sua teoria.

Palavras-Chave: quadriláteros notáveis. Van-Hiele. reconhecimento.

Abstract

This study's aim to verify the geometric thinking level of 300 high school students from five public institutions of Basic Education in Pernambuco's State, according to Van-Hiele (1957) theory. Thus, the tool used was a probing test with five items related to the concept of notable quadrilaterals, which was applied with these students in the period of May and June 2014. Here we discuss the data produced by the questions 02, 03, 04 and 05 of the test, turning our attention to the two first levels of Van-Hiele theory, making a qualitative and quantitative analysis of this data. Among the results, we highlight the majority of participants is at basic level of the

geometric thinking of Van-Hiele' theory, in which the student recognizes the geometric figures only by their appearance. In addition, we identified a small number of students in the second Van-Hiele' level (which corresponds to the recognition of geometric figures based on their properties) and third Van-Hiele' level (characterized by ordering of properties of figures) However, as Van-Hiele (1999), would be ideal for students to be able to perform the understand the function of the different elements of a deductive structure, which corresponds to the fourth level of Van-Hiele' theory.

Keywords: notable quadrilaterals. Van-Hiele. recognition.

INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, percebemos fortemente o progresso com as pesquisas no campo da Educação Matemática no Brasil, principalmente quando o foco está nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria. Na maioria das vezes essas pesquisas são estimuladas por dois motivos. O primeiro é decorrência da importância do conhecimento geométrico para o desenvolvimento humano, possibilitando que o cidadão consiga fazer uma leitura crítica do mundo. O segundo, pelos baixos índices de desempenho apresentados pelos estudantes do Ensino Básico nas avaliações de larga escala, a exemplo do SAEB¹ e do SAEPE².

Muitas dessas pesquisas, quando transpostas de forma adequada para a complexidade do cotidiano escolar, contribuem amplamente com a prática pedagógica do professor de Matemática, auxiliando esse profissional no planejamento de suas intervenções pedagógicas e na organização das situações didáticas. Assim, fica evidente a relevância do desenvolvimento de pesquisas articuladas com a sala de aula de Matemática, buscando compreender melhor os fenômenos didáticos que surgem nesse local.

A teoria de Van-Hiele (1957) para o desenvolvimento do pensamento geométrico surge nessa perspectiva, isto é, é uma teoria da aprendizagem, preocupada com a aprendizagem geométrica dos estudantes do Ensino Básico e também uma teoria instrucional, que busca orientar o trabalho pedagógico do professor no ambiente escolar

¹ Sistema de Avaliação da Educação Básica, desenvolvido para produzir dados acerca da qualidade dos sistemas educacionais brasileiros, das regiões geográficas, dos estados e do Distrito Federal. (Fonte: <http://portal.inep.gov.br/saeb>)

² Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, desenvolvido para realizar monitoramento do padrão de qualidade do ensino e apoiar as iniciativas de promoção da igualdade de oportunidades educacionais (Fonte: <http://www.saepe.caedufjf.net>).

(OLIVEIRA, 2012). Essa teoria é hierárquica, no sentido de que o aluno evolui em seu pensamento geométrico ao passo que ele aprende os conceitos geométricos, segundo uma sequência de cinco níveis de pensamento. Tal teoria, se aplicada de forma adequada, pode favorecer na melhora do desempenho do estudante, bem como nortear seu desenvolvimento (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015b).

Diante disso, o presente estudo procurou verificar os níveis de pensamento geométrico de estudantes do Ensino Médio de instituições de ensino da rede pública do Estado de Pernambuco. Nosso aporte teórico consiste na teoria de Van-Hiele (1957) para o desenvolvimento do pensamento geométrico, mas voltando nosso olhar para os níveis iniciais vanhielianos.

A TEORIA VANHIELIANA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico foi desenvolvida por Pierre Marie Van-Hiele e sua esposa Dina Van-Hiele Geodolf, como trabalho de tese, no período em que eles cursaram o doutorado em Matemática e Ciências Naturas na Universidade Real de Utrecht, na Holanda, em 1957. Esses pesquisadores centram seus estudos nas dificuldades de aprendizagem em Geometria apresentadas pelos seus alunos do Ensino Básico em uma escola de Amsterdã, buscando compreender os reais motivos que geravam tais dificuldades. Para tanto, se fundamentaram em Piaget, em especial na sua conhecida Epistemologia Genética.

Contudo, após o falecimento de Dina logo depois de concluir o doutorado, foi o próprio Pierre que ampliou a teoria vanhieliana. Assim, em 1959, ele publica um artigo intitulado “*La Pensée de l’Enfant et la Géométrie*” no *Bulletin de l’Association de Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public* em um Congresso de Educação Matemática na França, em que discute sobre os níveis de pensamento geométrico. Tal artigo chamou a atenção de pesquisadores de outros países, como a Rússia e os Estados Unidos. Foi a partir desse momento que sua teoria passa a ser conhecida mundialmente, pois sua tese estava escrita em holandês, de difícil tradução e acesso.

A teoria propõe que o estudante avança em seu pensamento geométrico por meio de uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, ao mesmo tempo em que ele aprende Geometria. A passagem de um nível “menos elaborado” para um nível “mais elaborado” ocorre a partir do contato com tarefas diferenciadas e adequadamente planejadas pelo docente. Nesse sentido, o que influencia o desenvolvimento nos níveis é a aprendizagem, e não a maturidade e a idade do aluno (NASSER; SANT’ANNA, 2010; NASSER; TINOCO, 2011).

A teoria define cinco níveis hierárquicos, sendo que o estudante só alcança certo nível de pensamento depois de passar pelos níveis antecedentes. Tal fato pode ser uma justificativa para as dificuldades que os estudantes demonstram em Geometria, no momento em que estão envolvidos em um nível de ensino mais “forte”, sem terem passado por momentos anteriores de aprendizagem nos níveis antecedentes com atividades diferenciadas e adequadas. O Quadro 1, organizado a partir do texto de Jehin e Chenu (2000) e traduzido pelos autores desse estudo, apresenta uma síntese dos níveis de Van-Hiele.

Quadro 1: Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

| NÍVEL | DESCRIÇÃO | EXEMPLO |
|-----------------------------------|--|---|
| Primeiro nível - básico | Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais, (protótipos visuais) sem usar explicitamente as propriedades desses objetos. | Os alunos consideram que um losango é losango “porque ele está na borda” ou uma altura é uma altura “porque é vertical”. |
| Segundo nível - análise | Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos. | Os alunos consideram que um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos. |
| Terceiro nível – dedução informal | Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender | Os alunos consideram que um quadrado é um quadrado, porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento. |

| | | |
|-------------------------------|--|---|
| | deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas. | |
| Quarto nível – dedução formal | Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las. | Os alunos são capazes de demonstrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango. |
| Quinto nível – rigor | Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias geometrias na ausência de modelos concretos. | Os alunos são capazes de entender geometrias não euclidianas. |

Fonte: JEHIN; CHENU, 2000, p. 69.

De acordo com Van-Hiele (1957), cada nível apresenta características particulares e distintas em relação aos demais níveis como, por exemplo, um vocabulário próprio. Além disso, nos níveis de pensamento geométrico, os objetos de conhecimento ocupam *status* diferentes. Assim, esse pesquisador orienta que a aprendizagem geométrica será adequada se a proposta pedagógica sugerida pelo professor de Matemática estiver articulada com o nível de pensamento apresentado pelos estudantes (COSTA, 2014).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nossa pesquisa contou com a participação de 300 alunos do Ensino Médio, sendo 100 do 1º ano, 100 do 2º ano e 100 do 3º ano. Esses participantes são alunos de cinco estabelecimentos de ensino de três cidades do Estado de Pernambuco, Cabo de Santo Agostinho, Limoeiro e Recife. Nas duas primeiras cidades contamos com apenas uma instituição em cada, e em Recife foram três escolas investigadas. Nesse texto não faremos referência aos nomes das escolas, para preservar o anonimato.

O nosso instrumento de coleta de dados foi um teste de sondagem³, composto por cinco quesitos relacionados aos quadriláteros notáveis, enfocando os níveis iniciais de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957). Nesse sentido, a finalidade do teste foi identificar os níveis de pensamento geométrico desses alunos. Para Van-Hiele (1999), o

³ O teste foi aplicado entre os meses de maio e junho de 2014.

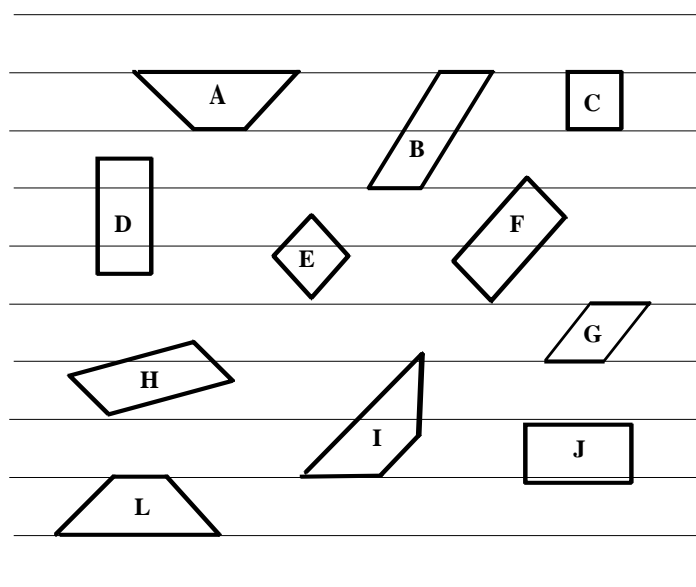
estudante ao concluir a Educação Básica deveria estar no quarto nível de sua teoria, isto é, ele deveria capaz de compreender a função dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva.

É importante salientar também que nesse trabalho apresentamos os resultados obtidos em quatro questões do teste, referentes aos itens 2, 3, 4 e 5. A análise do primeiro item pode ser encontrada em outro trabalho⁴.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS PRODUZIDOS

A segunda questão do teste apresentou onze quadriláteros notáveis de diferentes formatos e posições (Figura 1). Aqui os estudantes foram orientados a realizar a categorização desses quadriláteros em diferentes famílias: quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios.

Figura 1 – Quadriláteros notáveis referentes ao segundo item do teste de sondagem.



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS (2009).

A finalidade dessa questão foi averiguar se na classificação dos quadriláteros notáveis os estudantes eram capazes de reconhecê-los por meio de grupos de famílias.

⁴ COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. *Anais...* 14 Interamerican Conference on Mathematics Education, Tuxtla Gutiérrez, 2015, p. 1-9. Disponível em: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/525/240.

Inicialmente, os estudantes classificaram as figuras no grupo dos retângulos. Na Tabela 1 são apresentadas as figuras consideradas como retângulos pelos participantes do estudo, em porcentagem por série (ano) do ensino médio.

Tabela 1: figuras consideradas retângulos (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | - | 2 | 1 | 1 |
| B | 15 | 14 | 15 | 15 |
| C | 3 | 8 | 3 | 5 |
| D | 67 | 82 | 65 | 71 |
| E | 4 | 9 | 4 | 6 |
| F | 62 | 64 | 44 | 57 |
| G | 4 | 5 | 4 | 4 |
| H | 17 | 15 | 15 | 16 |
| I | 3 | 4 | 2 | 3 |
| J | 73 | 81 | 70 | 75 |
| L | - | 3 | 3 | 2 |

Fonte: autoria própria

Como é possível observar na Tabela 1, a maioria dos estudantes conseguiu realizar o reconhecimento do retângulo em seu formato prototípico⁵ (figura J), o que geralmente é enfatizado no ensino de Matemática, correspondendo a quase 75% do total de participantes. Já para os retângulos fora da posição prototípica (figuras D e F), houve uma queda do índice, isto é, uma média de 71% dos estudantes reconheceu a figura D como um retângulo e 57% dos discentes consideraram a figura F como sendo um retângulo. Aqui chamamos a atenção para o fato de que os retângulos não prototípicos, em geral, não são trabalhados em sala de aula de Matemática no Ensino Básico.

Os alunos também consideraram os paralelogramos como retângulos, com médias de 15% para a figura B, 4% para a figura G e aproximadamente 16% para a figura H. Esse aspecto parece ocorrer pelo fato de esses dois tipos de quadriláteros notáveis (o retângulo e o paralelogramo) apresentarem aparência semelhante, o que pode ter sido determinante na classificação dos discentes, desconsiderando, assim, suas propriedades.

Apenas 5% do total de participantes reconheceu o quadrado padrão (figura C) como retângulo, e 6% considerou o quadrado em posição “não padrão” (figura E) como sendo um retângulo. Além disso, os trapézios também foram incluídos na família dos

⁵ Com o lado maior paralelo às bordas horizontais da folha de papel.

retângulos por um pequeno número de estudantes: 1% (figura A), 3% (figura I) e 2% (figura L).

Em seguida, os estudantes realizaram a classificação das figuras na classe dos trapézios. Tal classificação encontra-se ilustrada na Tabela 2.

Tabela 2: figuras consideradas trapézios (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 66 | 69 | 48 | 61 |
| B | 5 | 7 | 13 | 8 |
| C | 3 | 1 | - | 1 |
| D | 3 | 2 | 5 | 3 |
| E | 4 | 4 | 4 | 4 |
| F | 3 | 5 | 8 | 5 |
| G | 6 | 1 | 13 | 7 |
| H | 10 | 17 | 7 | 11 |
| I | 61 | 73 | 39 | 58 |
| J | 2 | - | 1 | 1 |
| L | 62 | 74 | 51 | 62 |

Fonte: autoria própria

Em relação aos trapézios, notamos que a maioria dos estudantes foi capaz de reconhecê-los em diversas posições: 61% (figura A), 58% (figura I) e 62% (figura L). Os paralelogramos também foram classificados como trapézios por 8% dos estudantes para a figura B, 7% para a figura G e 11% para a figura H. Tal fato pode ter ocorrido, porque, aparentemente, tanto o trapézio como o paralelogramo apresentam lados “tortos”. Além disso, 4% dos participantes consideraram o quadrado “não padrão” (figura E) como trapézio, isso também pode ter sucedido devido a sua posição no papel, que parece possuir lados “torcidos”.

O quadrado padrão (figura C) foi reconhecido como trapézio por apenas 1% do total de estudantes. Já os retângulos apresentaram médias de 3% (figura D), 5% (figura F) e 1% (figura J). Tal resultado reforça a necessidade de realizar um estudo mais profundo, na tentativa de compreender essa frequência entre o público investigado, pois considerando, por exemplo, a aparência física (referente ao primeiro nível de Van-Hiele) como parâmetro de classificação dessas figuras, constatamos que tanto o quadrado como o retângulo divergem do trapézio.

Posteriormente, ocorreu a categorização das onze figuras na família dos quadriláteros (Tabela 3).

Tabela 3: figuras consideradas quadriláteros (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 25 | 33 | 28 | 29 |
| B | 42 | 43 | 36 | 40 |
| C | 32 | 46 | 25 | 34 |
| D | 24 | 46 | 32 | 34 |
| E | 39 | 43 | 31 | 38 |
| F | 27 | 50 | 30 | 36 |
| G | 31 | 47 | 39 | 39 |
| H | 29 | 45 | 29 | 34 |
| I | 25 | 34 | 31 | 30 |
| J | 32 | 42 | 22 | 32 |
| L | 21 | 28 | 23 | 24 |

Fonte: autoria própria

Pela Tabela 3, notamos que menos da metade dos alunos considerou as onze figuras planas pertencentes a esse grupo (dos quadriláteros). Esse dado é bastante preocupante, pois a maioria dos estudantes não reconheceu tais figuras como quadriláteros, o que é um forte indício de que esses alunos apresentam dificuldades conceituais e de aprendizagem em relação a esse tema ou, ainda, que o seu ensino na Educação Básica não é trabalhado de forma sistematizada, o que reforça a necessidade de realização de um estudo mais profundo sobre a matéria.

Os paralelogramos foram considerados como quadriláteros por 40% (figura B) 39% (figura G) e 34% (figura H). Os trapézios por 29% (figura A), 30% (figura I) e 24% (figura L). Já os quadrados em formato prototípico (figura C) foram considerados como quadriláteros por 34% dos alunos; os quadrados “não padrões” (figura E) por 38% dos participantes. Enquanto que os retângulos por 34% (figura D), 36% (figura F) e 32% (figura J).

Depois, os alunos categorizaram as figuras no grupo dos quadrados, como pode ser verificado na Tabela 4.

Foi possível notar que o quadrado, em sua forma prototípica, foi reconhecido por 91% dos discentes, enquanto o quadrado “não padrão” foi identificado por 38%. Isso é um dado importante, pois, se por um lado, a grande maioria dos estudantes conseguiu reconhecer o quadrado (em seu formato padrão), por outro, 9% do total de alunos ainda não conseguiu realizar tal reconhecimento, que é um aspecto preocupante, considerando o nível de escolaridade desses estudantes.

Tabela 4: figuras consideradas quadrados (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | - | 1 | 1 | 0,7 |
| B | 2 | - | 4 | 2 |
| C | 89 | 95 | 89 | 91 |
| D | 6 | 6 | 16 | 9 |
| E | 34 | 49 | 31 | 38 |
| F | 1 | 2 | 1 | 1 |
| G | 2 | 6 | - | 3 |
| H | - | 1 | 1 | 0,7 |
| I | 2 | 1 | 2 | 2 |
| J | 8 | 18 | 15 | 14 |
| L | 1 | - | 1 | 0,7 |

Fonte: autoria própria

Outro ponto que chamou atenção nessa seção foi que apenas quase quatro em cada dez discentes do Ensino Médio classificaram o quadrado “não padrão” como um quadrado, dessa forma, seis em cada dez não conseguem realizar essa classificação. Tal fato é um forte indício de que, ainda, é ensinado nas aulas de Matemática apenas o formato prototípico do quadrado.

Os retângulos foram identificados como sendo quadrados pelos estudantes, apresentando uma média de 9% (figura D), 1% (figura F) e de 14% (figura J). Provavelmente esse fenômeno pode ter ocorrido pelo fato de esses dois tipos de quadriláteros notáveis não apresentarem lados “tortos”. Os paralelogramos (figuras B, G e H) e os trapézios também foram considerados como quadrados, com uma pequena frequência entre os estudantes: 2% (figura B), 3% (figura G) e 0,7% (figura H) para os paralelogramos; 0,7% (figura A), 2% (figura I) e 0,7% (figura L) para os trapézios. Esse resultado obtido nos chama atenção, pois tendo a aparência como parâmetro de classificação (característica do primeiro nível de Van-Hiele), tanto os paralelogramos como os trapézios possuem divergências em relação aos quadrados.

Dando continuidade, os estudantes classificaram os quadriláteros enquanto paralelogramos, como é mostrado na Tabela 5.

Tabela 5: figuras consideradas paralelogramos (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 17 | 18 | 15 | 17 |
| B | 27 | 52 | 25 | 35 |
| C | 3 | 8 | 1 | 4 |
| D | 9 | 11 | 3 | 8 |
| E | 16 | 9 | 3 | 9 |
| F | 17 | 19 | 17 | 18 |
| G | 14 | 50 | 21 | 28 |

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| H | 19 | 51 | 33 | 34 |
| I | 16 | 17 | 19 | 17 |
| J | 10 | 8 | 1 | 6 |
| L | 13 | 10 | 13 | 12 |

Fonte: autoria própria

Aqui, notamos que menos da metade dos estudantes reconheceu os quadriláteros como sendo paralelogramos: 35% (figura B), 28% (figura G) e 34% (figura H).

Os trapézios foram considerados pelos discentes como paralelogramos, com médias de 17% (figura A), 17% (figura I) e 12% (figura L). Tal fenômeno pode ter ocorrido pelo fato de os paralelogramos e os trapézios apresentarem lados “tortos”, então, suas aparências se assemelham.

No caso dos retângulos, eles foram classificados como paralelogramos por: 8% (figura D), 18% (figura F) e 6% (figura J). Além disso, apenas 4% dos discentes categorizaram os quadrados (padrões) como paralelogramos e uma média de 9% dos participantes considerou os quadrados “não padrões” como paralelogramos. Aqui notamos que esses estudantes parecem demonstrar que realizaram a inclusão de classe, que é algo importante de se destacar, pois é uma característica do terceiro nível de Van-Hiele. No entanto, isso foi verificado com frequência bastante reduzida.

Para finalizar o item, os alunos realizaram a classificação das figuras na classe dos losangos. Na Tabela 6, podemos observar quantitativamente os resultados.

Tabela 6: figuras consideradas losangos (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| A | 6 | 7 | 10 | 8 |
| B | 12 | 12 | 7 | 10 |
| C | 3 | 7 | 1 | 4 |
| D | 1 | - | - | 0,3 |
| E | 34 | 51 | 47 | 44 |
| F | 5 | 4 | 7 | 5 |
| G | 50 | 36 | 22 | 36 |
| H | 13 | 12 | 15 | 13 |
| I | 11 | 10 | 14 | 12 |
| J | 1 | - | - | 0,3 |
| L | 8 | 8 | 10 | 9 |

Fonte: autoria própria

Pela Tabela 6, observamos que em média 44% dos estudantes reconheceram o quadrado “não padrão” como sendo losango. Isto significa que a maioria dos participantes não foi capaz de identificar esse quadrado como um losango especial (em

que os ângulos são retos), em seu aspecto global. Apenas cerca de 4% classificaram o quadrado padrão como losango. Aqui há evidências que os estudantes têm dificuldades de reconhecer o quadrado (padrão ou não) como sendo um tipo particular de losango.

Os paralelogramos também foram considerados losangos, com frequências entre os estudantes de 10% (figura B), 36% (figura G)⁶ e 13% (figura H). O retângulo não padrão (figura F) também foi considerado como losango por 5% do total de participantes. Novamente, tal fato reforça a ideia de que na classificação os estudantes consideraram somente a aparência dessas figuras, na medida em que os seus desenhos aparecem “tortos” na folha do caderno. Além disso, os retângulos padrões (figuras D e J) também foram considerados como losangos pelos estudantes, apresentando uma média de 0,3% para os dois retângulos.

No caso dos trapézios, eles foram reconhecidos como losangos por médias de 8% (figura A), 12% (figura I) e 9% (figura L). Isso pode ter ocorrido pelo fato de esses quadriláteros notáveis apresentarem uma aparência com lados “torcidos”, assim como os losangos.

A terceira questão solicitou aos alunos que produzissem dois quadrados diferentes. Desse modo, nossa finalidade foi observar os critérios que eles consideraram na diferenciação entre as duas figuras.

Como primeiro resultado do item que nos chamou atenção foi o fato de que, na produção referente ao primeiro quadrado, uma média de 11% do total de participantes não construiu quadrados, como pode ser verificado na Tabela 7. Esses dados evidenciam que esses estudantes apresentam dificuldades em reconhecer um quadrado, tanto pelo seu aspecto global como pelas suas propriedades.

Uma média de 7% dos participantes do teste não respondeu essa questão. Dessa forma, suas produções para esse item não foram consideradas na análise.

Tabela 7: figuras produzidas na primeira fase do item (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|---------------|--------|--------|--------|-------|
| Quadrado | 87 | 89 | 91 | 89 |
| Losango | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Retângulo | 7 | 8 | 7 | 7 |
| Paralelogramo | 3 | - | 1 | 1 |
| Triângulo | 1 | - | - | 0,3 |

Fonte: autoria própria

⁶ Aparentemente, a Figura G lembra um losango, no entanto, tal fato não procede, pois para ser losango é necessário que as medidas dos comprimentos dos lados da figura sejam congruentes entre si, o que é não possível de se verificar nesse caso.

Pela Tabela 7, observamos que uma média de 89% dos estudantes produziu quadrados (em posição padrão) na primeira etapa do item. Além disso, 2% construíram losangos, 7% retângulos, 1% paralelogramos e 0,3% triângulo. Tais resultados reforçam a necessidade da realização de um estudo futuro, que busque compreender os reais motivos das construções desses alunos.

Em seguida, analisamos o segundo momento (a construção do outro quadrado) das produções dos estudantes que não construíram um quadrado na primeira fase do item do teste. A Tabela 8 apresenta as figuras produzidas pelos estudantes.

Tabela 8: figuras produzidas na segunda fase do item (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|---------------|--------|--------|--------|-------|
| Retângulo | 91 | 64 | 82 | 79 |
| Paralelogramo | 9 | - | - | 3 |
| Trapézio | 18 | 36 | - | 18 |

Fonte: autoria própria

Como podemos notar, uma média de 79% dos participantes construiu retângulos na segunda etapa da questão, 3% produziram paralelogramos e 18% fizeram trapézios.

Dando continuidade, analisamos as produções dos estudantes que construíram quadrados na primeira etapa da questão. Na Tabela 9, podemos encontrar a lista das figuras produzidas pelos estudantes na segunda etapa do item.

Tabela 9: figuras produzidas na segunda etapa do item (em %)

| Figura | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|---------------------|--------|--------|--------|-------|
| Quadrado padrão | 24 | 50 | 18 | 31 |
| Quadrado não padrão | 39 | 29 | 34 | 34 |
| Retângulo | 26 | 15 | 27 | 23 |
| Paralelogramo | - | 3 | 3 | 2 |
| Trapézio | - | - | 6 | 2 |
| Não respondeu | 11 | 7 | 7 | 6 |

Fonte: autoria própria

Pela Tabela 9, observamos que uma média de 31% dos participantes diferenciou suas produções apenas considerando o tamanho das figuras, ou seja, eles construíram dois quadrados (em posição padrão) de tamanhos distintos. Para aproximadamente 34% do total de alunos, o quadrado “não padrão” (com os lados não paralelos as margens da folha) foi considerado como um quadrado diferente do formato prototípico, ou seja, esses discentes distinguiram os dois quadrados pela sua disposição na folha de papel (e não pelos seus tamanhos).

Além disso, 23% desses alunos consideram os retângulos como quadrados. Esse dado nos chama para uma reflexão, visto que, em geral, devido à maneira como o conceito desses quadriláteros é ensinado no Ensino Básico, dificilmente um aluno deveria reconhecer um retângulo como um quadrado, tendo em vista que apresentam aparências diferentes.

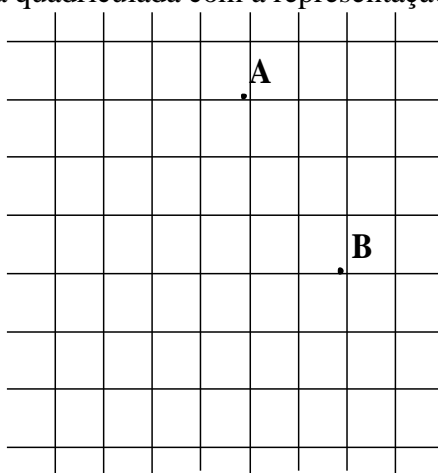
Outro dado bastante instigante foi que o paralelogramo e o trapézio foram reconhecidos como quadrados, isso para 2% do total, respectivamente. Mais uma vez, esse fato necessita de um estudo mais aprofundado, porque essas duas figuras apresentam divergências em relação aos quadrados, no que diz respeito à aparência.

O quarto item solicitou aos estudantes que, a partir de dois pontos estabelecidos A e B , produzissem um losango $ABCD$. Esses pontos (A e B) estavam representados por dois nós, colocados em uma malha quadriculada, como é mostrado na Figura 02.

Esse item pretendeu verificar as estratégias aplicadas pelos alunos na produção do losango, particularmente se eles utilizavam as propriedades das diagonais do losango para realizar a construção. As produções foram categorizadas em três esferas:

- a) perceptiva – na qual o aluno faz uso de sua percepção sobre a aparência do losango, realizando uma construção aproximada;
- b) reflexiva – na qual o estudante utiliza as propriedades das diagonais do losango na construção da figura.
- c) Outro tipo de resposta – na qual o aluno constrói outro tipo de quadrilátero notável ou outra figura geométrica (que não seja o losango).

Figura 02 – Malha quadriculada com a representação dos pontos A e B .



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS (2009).

Na Tabela 10 é mostrada a classificação das construções, considerando essa categorização.

Tabela 10: classificação das produções dos discentes no que se refere a construção do losango a partir de dois pontos dados (em %)

| Níveis | 1º ano | 2º ano | 3º ano | Média |
|------------------------|--------|--------|--------|-------|
| Perceptivo | 47 | 40 | 34 | 40 |
| Reflexivo | 13 | 32 | 21 | 22 |
| Outro tipo de resposta | 24 | 12 | 27 | 21 |
| Não respondeu | 16 | 16 | 18 | 17 |

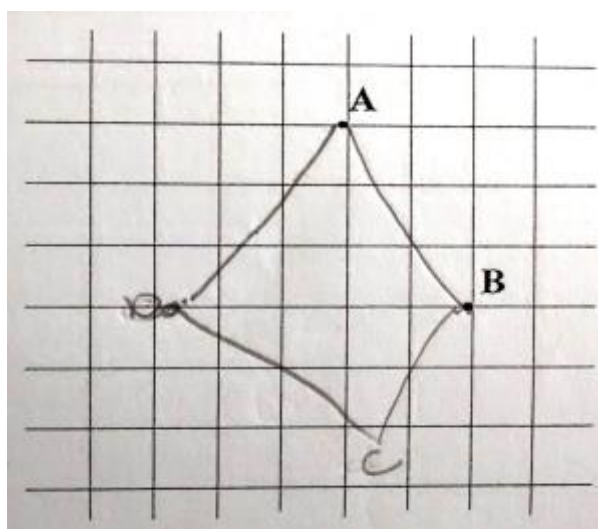
Fonte: autoria própria

Ressaltamos que apesar da certa “facilidade” promovida pela malha na produção do losango, poucos alunos foram capazes de produzir esse quadrilátero notável corretamente.

Observamos, pela Tabela 10, que em média 40% dos alunos produziram o losango trabalhando no nível da percepção, não mobilizando as propriedades das diagonais dos losangos, tendo como referencial apenas a aparência da figura. A Figura 3, a seguir, exemplifica esse tipo de construção.

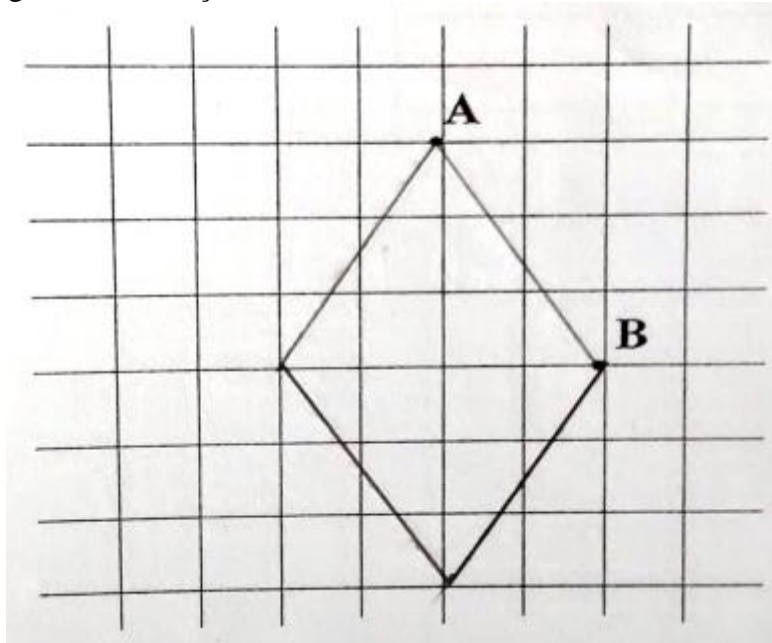
Apenas 22% dos alunos conseguiram construir o quadrilátero no nível reflexivo e, pelos registros deixados por eles, pudemos evidenciar que as propriedades das diagonais foram aplicadas no processo de construção (Figura 4).

Figura 3 – Produção do Aluno 213 do 3º ano referente à quarta questão do teste.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 4 – Produção do Aluno 75 do 1º ano referente ao item 04.



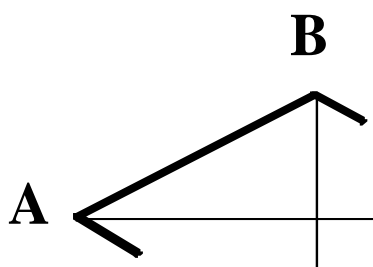
Fonte: Dados da pesquisa.

Entre os alunos investigados, em vez de losangos, 21% construíram outros tipos de quadriláteros notáveis (trapézios e retângulos), triângulos e um polígono irregular qualquer. Ou seja, um em cada cinco alunos do ensino médio demonstra não saber produzir um losango, seja por sua aparência física seja por suas propriedades.

Além disso, em média, 17% dos participantes não responderam o item, o que pode reforçar que esses alunos possuem dificuldades de aprendizagem sobre o conceito de quadriláteros notáveis.

A quinta questão perguntou aos alunos se era viável reconstruir um losango dado $ABCD$, que teve uma parte apagada (Figura 5). Além disso, eles foram orientados a explicitarem suas opções. Esse item objetivou verificar se os participantes fariam referência às propriedades do losango nas justificativas.

Figura 05 – Losango $ABCD$ que teve um pedaço apagado.



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS (2009).

Os resultados mostram que 37% dos estudantes reconstruíram o losango fazendo uso somente da percepção, sem usarem as propriedades das diagonais na construção. Em geral, esses alunos alegaram que “só era preciso realizar a ligação dos pontos”. Apenas 10% dos sujeitos se referiram, de certo modo, às propriedades das diagonais do losango, e quase 3% se valeram da definição de losango na justificativa.

Quase um em cada cinco alunos desenhou outras figuras, no lugar de losangos. Os paralelogramos quaisquer foram escolhidos por 8% dos sujeitos e 1% deles escolheu trapézios. Quase 8% dos alunos produziram figuras com cinco ou mais lados. Tal fato merece um estudo mais sistematizado, buscando compreender o motivo dessas produções, mas fazemos a hipótese de que esses alunos apresentam dificuldades conceituais sobre os quadriláteros notáveis.

Além disso, 18% do total de alunos argumentou que é impossível reproduzir o losango, 7% não justificaram suas respostas e outros 6% deixaram a questão em branco.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise dos dados produzidos nesse estudo, foi possível observamos que a maior parte dos alunos do Ensino Médio investigados ainda está no nível básico de pensamento geométrico, segundo a teoria de Van-Hiele (1957). Esses estudantes reconhecem os quadriláteros notáveis apenas pela sua aparência física, desconsiderando, assim, tais figuras geométricas como detentoras de propriedades, não realizando também a ordenação delas. Isso foi verificado nas respostas dos discentes quando, por exemplo, ao construírem um losango por meio da malha quadriculada (quarta questão do teste), 40% deles fizeram uso apenas da aparência física desse quadrilátero notável, não mobilizando, assim, suas diagonais.

Nesse sentido, o fato de os alunos produzirem um losango apenas pelo aspecto global, nos parece comprovar que o conceito de quadriláteros notáveis não é trabalhado de forma sistematizada no Ensino Básico, o que, talvez, pode ser generalizado para os demais conceitos da Geometria Escolar. Dito de outra forma, esses resultados indicam que, provavelmente, a Geometria vivenciada na Educação Básica nessas escolas pesquisadas não consegue promover o avanço do pensamento geométrico desses estudantes.

Além disso, verificamos que muitos alunos consideram figuras diversas, tais como triângulos, pentágonos e até mesmo circunferências como quadrados. Pode-se pensar que esses alunos não conseguem reconhecer figuras geométricas simples nem mesmo por sua aparência geral, como se não estivessem trabalhando nem mesmo no primeiro nível do modelo de Van-Hiele. Não podemos esquecer que as orientações curriculares, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), preconizam que esse reconhecimento deve estar consolidado desde o início do Ensino Fundamental.

Também, foram observados alguns estudantes que reconheceram os quadriláteros notáveis como detentores de propriedades e outros alunos (em número bem reduzido) que realizaram a inclusão de classe dessas figuras geométricas, isto é, estavam no segundo nível e no terceiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957), respectivamente. Contudo, de acordo com a teoria vanhieliana o ideal para um aluno que esteja finalizando os seus estudos na Educação Básica, seria que ele estivesse no quarto nível de pensamento geométrico, no qual é capaz de compreender a dedução e o significado intrínseco da demonstração.

Portanto, perante os resultados obtidos no estudo, no caso específico desses alunos e suas respectivas escolas, no Estado de Pernambuco, podemos afirmar que, apesar de todos os avanços significativos obtidos com as pesquisas educacionais no campo da Geometria nas últimas décadas, há fortes indícios de que o seu ensino ainda é negligenciado, ou trabalhado de forma inadequada, o que reforça a necessidade de investigar sobre os reais motivos que favorecem a manutenção desse quadro.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. 1998. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 3. ed. Brasília: MEC /SEF, 1998. 88p.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009. 140p. pp. 177-211.

COSTA, A. P. Evoluindo o raciocínio geométrico por meio de uma sequência didática: o caso dos quadriláteros. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-

GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18, 2014, Recife. **Anais...** Recife: EDUMATEC, 2014. pp. 1-12.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In: INTERAMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION, 14, 2015a, Tuxtla Gutiérrez. **Anais...** Tuxtla Gutiérrez: IACME, 2015a, pp. 1-9.

_____. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino fundamental: um estudo envolvendo os quadriláteros notáveis. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2015b, Ilhéus. **Anais...** Ilhéus: SBEM-BA, 2015b, pp. 1-12.

JEHIN, M. D.; CHENU, F. Comment évaluer le raisonnement géométrique?. **Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale**, Université de Liège, v.3, n.4, pp. 67-85. 2000.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFJR, 2010. 101p.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso Básico de Geometria** – enfoque didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos. UFRJ/Instituto de Matemática: Projeto Fundação, 2011. 126p.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 2012. 266f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. UFJF, Juiz de Fora, 2012. 148p.

VAN-HIELE, P. M. **El problema de la comprensión**: en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria. 1957. 151f.. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht: Utrecht, 1957.

_____. Developing geometry thinking through activities that begin with play. **Teaching Children Mathematics**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 6, pp. 310-316. February, 1999.