Analizando as seções planas a partir uma perspectiva da Geometria Projetiva: um caso de Homologia

Analyzing the flat sections from a Projective Geometry perspective: a case of Homology

Sandra de Souza Melo

Doutora em Pedagogia
Docente do Departamento de
Expressão Gráfica,
Universidade Federal de
Pernambuco, Recife, Brasil
sandra.melo@ufpe.br
ORCID:
<https://orcid.org/0000-0002-5480-240X>

RESUMO

Este trabalho trata de uma análise de seções planas a partir de uma perspectiva das transformações geométricas, mais precisamente da Geometria Projetiva, como um caso de Homologia. As transformações geométricas são operações aplicadas a um determinado elemento - Objeto - a fim de produzir um outro elemento - Imagem. Por meio de aportes teóricos, apresentaremos a Homologia e seus elementos. Vamos analisar algumas seções planas, destacando a presença dos elementos da Homologia no traçado para a obtenção de cada uma delas. Empreendemos uma pesquisa bibliográfica do tema abordado neste artigo para depois averiguar a Projetividade presente nas seções planas. Tomamos como base os trabalhos desenvolvidos por Soares (1962), Costa e Costa (1994) e Melo (1993), que discutem e apresentam a teoria projetiva e/ou o seu relacionamento com a Geometria Descritiva e a Perspectiva Cônica. Em tal análise, destacaremos a presença dos elementos da homologia para a defesa de que estas seções podem ser tomadas como um caso de Homologia. Com base na exposição das ideias e das análises realizadas, comprovamos a existência dos elementos da Homologia nos traçados de seções planas, ainda que omitidos ou com outra nomeação, e que são essenciais para a realização das representações gráficas de modo geral.

Palavras-chave: Transformações geométricas, Geometria Projetiva, homologia, seções planas, Sistemas de Representação.

ABSTRACT

This work deals with an analysis of plane sections from a perspective of geometric transformations, more precisely Projective Geometry, as a case of Homology. Geometric transformations are operations applied to a certain element - Object - in order to produce another element - Image. Through theoretical contributions, we will present Homology and its elements. We will analyze some plane sections, highlighting the presence of the elements of Homology in the layout to obtain each one. We undertook a bibliographic search of the topic covered in this article, to later investigate the Projectivity present in the plane sections. We take as a basis the works developed by Soares (1962), Costa and Costa (1994) and Melo (1993), which discuss and present the projective theory and / or its relationship with Descriptive Geometry and Conical Perspective. In such an analysis, we will highlight the presence of the elements of homology for the defense that these sections can be taken as a case of Homology. Based on the exposition of the ideas and analyzes carried out, we verified the existence of the elements of Homology in the layout of flat sections, even if omitted or with another name, and which are essential for the realization of graphic representations in general.

Keywords: Geometric transformations, Projective Geometry, homology, plane section, Representation Systems.

1. INTRODUÇÃO

As transformações geométricas são operações - funções - aplicadas a um determinado elemento - denominado *objeto* - a fim de produzir um outro elemento - denominado *imagem*. Tais elementos podem guardar entre si relações que vão deste a total coincidência até a mais aparente dissemelhança.

Segundo Melo (2020), de acordo com os resultados que estas transformações apresentam, dizemos que elas fazem parte de um mesmo grupo de transformações. Nas palavras de Pinheiro (1974 apud MELO, 2020), as transformações do plano se apresentam como grupos, caracterizando cada um deles, “uma geometria”.

De fato, o matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925) elaborou uma classificação das geometrias conforme os grupos de transformações estudados e proposto em seu famoso “Programa de Erlangen” (PINHEIRO, 1986; GUIBIN, 2000). Assim, partido do mais genérico para o mais específico temos uma geometria e seu grupo de transformações: 1. Topologia – Transformações Topológicas; 2. Geometria Projetiva – Transformações Projetivas; 3. Geometria Arguesiana ou Afim - Transformações Afins; 4. Geometria Métrica Euclidiana – Transformações por Isometrias e por Semelhanças.

Cada um dos grupos de transformações apresenta um invariante, que o caracteriza pelas propriedades da figura objeto que são mantidas na figura imagem obtida pela aplicação de uma transformação deste grupo. Essa transformação poderá alterar ou não características da forma original (objeto). É o que chamamos de invariante da transformação (SANCHEZ-MARMOL, PEREZ-BEATO, 1945; PINHEIRO, 1974; COSTA e COSTA, 1994; MELO, 2020).

Temos, então, como invariantes para as Isometrias, as medidas lineares e angulares; para as Semelhanças, as medidas angulares; para as Afinidades, a razão simples; para as Projetividades, a razão dupla; e finalmente, para as Transformações Topológicas, a ordem e a continuidade (MELO, 2020).

Debruçando-nos sobre as Transformações Projetivas e buscando os dados que remetem à sua origem, verificamos que matemáticos, pensadores e artistas contribuíram para o seu desenvolvimento, aportando ideias e conceitos que dão corpo ao que hoje discutimos, estudamos e conhecemos como seus axiomas, teoremas e princípios.

Começamos destacando a contribuição dos artistas do Renascimento, que por meio de práticas e instrumentos utilizados para resolver seus problemas de representação na pintura, contribuíram para o desenvolvimento da teoria da Geometria Projetiva (MELO, 2020).

Para representar os objetos, as paisagens e plasmá-los numa pintura, um problema conhecido pelos pintores que tentavam retratar a realidade, era

resolvido com um instrumento pouco conhecido hoje em dia, mas bastante famoso na história da técnica do desenho de observação: o perspectógrafo (MARIOTTI, 2019). Tal instrumento concretiza em si mesmo o modelo geométrico da visão, como representação no plano do mundo concreto.

Do ponto de vista de Mariotti (2019), os perspectógrafos, e sua evolução dão testemunho do desenvolvimento das estratégias para realizar a representação do mundo que nos cerca, culminando na teoria da perspectiva, e podendo ser considerados como elementos fundamentais para o desenvolvimento posterior da Geometria Projetiva.

Para a utilização de tais instrumentos, foram escritos os “Tratados de pintura” e estes descrevem o funcionamento de tais instrumentos, e das técnicas da perspectiva e dos primeiros esboços das novas teorias que deles surgiram, assumindo um grande papel na construção do processo de evolução das ideias matemáticas, devendo ser considerados como elementos de articulação em direção àquela sistematização teórica que dará origem à Geometria Projetiva (MELO, 2020).

Figura 1: Desenho de Da Vinci – Homem desenhando uma perspectiva utilizando o perspectógrafo.

Fonte:

<https://brunelleschi.imss.fi.it/menteleonardo/imdl.asp?c=13419&k=13362&rif=13437&xsl=1> (2006)

Poncelet (1788-1867), discípulo de Gaspar Monge e oficial do exército de Napoleão, estruturou a Geometria Projetiva, em seu “Traite des Propriétés Projectives dês Figures” publicado em 1822, no qual ele fez o estudo sistematizado das propriedades de projetar e seccionar pelo método das projeções centrais verificando que estas propriedades subsistiam em todas as figuras que se obtém através daquelas. De fato, as operações fundamentais do método de Poncelet são as projeções e as seções (SANCHEZ-MARMOL, PEREZ-BEATO, 1945; COSTA e COSTA, 1994; MELO, 2020). Destacamos ainda que a

Geometria Projetiva, teoria em que Desargues¹ e Pascal² tinham dado os primeiros passos, no século XVII, segundo Guisin (2000), estava praticamente abandonada desde a época destes teóricos da matemática.

Assim, todas as vezes que realizamos representações por meio de projeções, estamos projetando e cortando para obter imagens oriundas de objetos. As projeções são realizadas por meio de um centro de projeções que pode ser próprio (distância finita) ou impróprio (distância infinita).

Podemos exemplificar as duas situações pela sombra projetada. Para o caso do centro próprio, teríamos um foco de luz finito como na figura 2. Cada elemento é projetado pela luz do poste (centro), por onde passam os raios projetantes e sua sombra projetada no chão é a seção. Todos esses elementos podem ser comparados ao processo projetivo onde realizamos projeções e seções a partir de um centro de projeções.

Figura 2 – Sombra projetada por um ponto de luz finito

Fonte: http://www.todacultura.com/talleres/taller_dibujo/imagenes/sombra_radial.jpg (2015)

¹ Girard Desargues (1591–1661) nasceu em Lyon. Não se sabe nada de seus estudos até que aparece em Paris em 1626 nos círculos filosóficos e científicos próximos a René Descartes (1596–1650), com quem teve profunda amizade. Em 1628 se encontrava servindo como engenheiro militar em Rochela, e à volta da guerra trabalhou como arquiteto em Paris a serviço do Cardeal Richelieu. Fue fundamentalmente um engenheiro e um arquiteto, pelo que suas obras matemáticas estão sempre dirigidas a uma aplicação prática. Desargues investiga as seções cônicas e os pontos do infinito; a invariância da razão dupla e dos quaternos harmônicos; a teoria das retas polares; e o famoso **Teorema de Desargues**: “*Si proyectamos un triángulo del plano proyectivo de vértices A, B, C, desde un punto O, obtenemos otro triángulo de vértices A', B', C', y decimos que los dos triángulos son perspectivos desde O. Entonces, dos triángulos son perspectivos si y sólo si los lados correspondientes se cortan en tres puntos alineados*”.

² Blaise Pascal (1623-1662). Aos 11 anos seu pai o levava às sessões da “Academia Mersenne”, onde estabeleceu contato com Desargues. Éste o animou a usar seu *método de proyección y sección* e aos 16 anos publicou seu famoso trabalho *Essay pour les coniques* onde aparece o teorema que leva seu nome. **Teorema de Pascal**: “*Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados*”. Em geral, um hexágono não está inscrito em uma cônica, e o teorema de Pascal expressa a condição maravilhosamente simples para que ele esteja inscrito numa cônica. Por isso se chama *hexagrama místico de Pascal*.

Para o centro impróprio, podemos comparar com as sobras projetadas pelo sol. Estando o sol a uma distância imensa da terra, os raios solares são considerados paralelos entre si, ou seja, no infinito. Assim, a figura 3 nos mostra as projeções realizadas por um centro de projeções impróprio, cujos raios projetantes são paralelos entre si, e a sombra é a seção no plano do chão.

Figura 3 – Sombra projetada por um ponto no infinito

Fonte: http://www.todacultura.com/talleres/taller_dibujo/imagenes/sombra_paralela.jpg (2015)

Partindo da Geometria Projetiva, mais precisamente, da Homologia, vamos analisar algumas seções planas (no cone, no cilindro, na pirâmide e no prisma), destacando a presença dos elementos da Homologia no traçado para a obtenção de cada uma delas. Para tal procedimento, tomamos como base os trabalhos desenvolvidos por Soares (1962), Costa e Costa (1994) e Melo (1993) que discutem e apresentam a teoria projetiva e/ou o seu relacionamento com a Geometria Descritiva e a Perspectiva Cônica.

Como resultado, pudemos asseverar a existência dos elementos da Homologia presentes nos traçados de seções planas, ainda que omitidos ou com outra nomeação, e que são essenciais para a realização das representações gráficas de modo geral.

2. DESENVOLVIMENTO

Procuraremos destacar o foco de estudo da Geometria Projetiva e sua importância como base teórica para a Geometria Descritiva e para tal passaremos a apresentar autores que se dedicaram a escrita de artigos e/ou trabalhos monográficos que se debruçaram sobre tal tema. Também a carência de suporte projetivo nos conhecimentos proporcionados aos alunos, sem que a Projetiva figure em sua bibliografia e/ou práticas metodológicas.

O sistema de representação – Geometria Descritiva – idealizado por Gaspar Monge, tem como fundamento teórico a Geometria Projetiva, que respalda seu traçado e propriedades. Costa e Costa (1994), destacam que esta

Geometria Projetiva tem fundamental importância no Desenho Representativo e apresentam o produto de homologias na relação entre as vistas ortogonais.

Melo (1993) mostra um estudo das relações projetivas no sistema cônico verificando-as, para os planos das faces do paralelepípedo de referência, utilizando tais planos - por serem as peças em desenho industrial ou mecânico, as edificações em arquitetura, envolvidos pelos referidos sólidos - apresentando os elementos da homologia - Centro S , Eixo de Homologia e , retas limites f' e d - nas representações em perspectiva.

As projetividades acontecem nos sistemas de representação - perspectivas e vistas ortogonais - e conforme Bustamante (1994 apud MELO, 2020) estudam as propriedades das figuras independentemente de medida; analisam a posição e a relação entre duas ou mais figuras sem a preocupação de grandeza; e ainda, estudam os problemas de secância e de modo particular a tangência.

As duas operações fundamentais realizadas na Geometria Projetiva para estabelecer a relação entre figura objeto e imagem são a projeção - centro S , próprio ou impróprio - e a seção - imagem (SOARES, 1962; RODRIGUES, 1968; COSTA e COSTA, 1994; MELO, 2020).

Rodrigues (1968, p. 22) transcreve o texto de Poncelet sobre a finalidade do seu tratado sobre a Projetiva:

[...] engrandecer os recursos da simples Geometria, generalizando suas concepções e sua linguagem, ordinariamente muito restritas, aproximando-as da Geometria analítica e, sobretudo, oferecer meios próprios para demonstrar e fazer descobrir, facilmente, as propriedades de que gozam as figuras quando se as considera de uma maneira abstrata e independente de qualquer grandeza absoluta e determinada.

Por meio de seu estudo, casos antes declarados impossíveis de resolução pela Geometria Euclidiana, passam a apresentar solução dentro da Geometria Projetiva.

A criação da Geometria Projetiva permitiu o tratamento gráfico e analítico, matematicamente rigoroso e generalizado, das projeções de figuras sobre superfícies, ampliando a conceituação básica da Geometria Descritiva e tornando-se um valioso instrumento na construção de figuras projetadas. (ALMEIDA NETO, 1994, p. 56).

Nos anais do XI Seminário do Programa de Pós-graduação em Desenho, Cultura e Interatividade, de tema central Traços do Desenho (2015), se encontra relatado que além da Geometria Descritiva, outros conhecimentos são necessários para o desenho, por meio de uma citação de Battle, entretanto, neste estudo, não se considera o suporte Projetivo por trás de todas as representações gráficas:

A representação gráfica na arquitetura envolve uma série de conhecimentos distribuídos por diversas disciplinas, como a

geometria plana e espacial, o desenho geométrico, o desenho técnico, o desenho artístico, a descritiva, a perspectiva, etc. (BATTLE, 2011, p.2);

Fialho et al (1994, p. 157), defendem que

A geometria é, por excelência, a base das construções mentais. Mais importante que resolver problemas usando-se procedimentos memorizados que, tão logo quanto possível, serão esquecidos, é necessário que se privilegie o caráter formativo de todas as disciplinas associadas ao desenho.

Ao entendermos os fundamentos aportados pela Geometria Projetiva, nos apropriamos dos conceitos que respaldam as construções geométricas, sejam elas no bi (2D) ou tridimensional (3D).

No estudo realizado por Valcarce (2018), vemos uma análise da bibliografia relacionada nas ementas dos cursos de arquitetura mostrando o estudo da Geometria Descritiva e sua relação com outras áreas. Deste estudo se evidencia, que pouco da referida bibliografia, está relacionada com a Geometria Projetiva – que respalda toda e qualquer operação realizada na representação de formas – onde duas das instituições apresenta a obra de Rodrigues (1968) que trata, em parte, de questões de Homologia. Destacamos que Almeida Neto (1994) ressalta o trabalho de Rodrigues (1969), como uma obra ontológica sobre a Geometria Descritiva, que possui um capítulo inteiramente dedicado à Geometria Projetiva, cujos conceitos são posteriormente usados de forma precisa nos traçados das representações gráficas.

Cavalcanti, Melo e Souza (2018, p. 73) defendem que “a visualização espacial envolve a habilidade de imaginar e, mentalmente transformar informações espaciais (UTALL et al, 2013; SEABRA e SANTOS, 2007), sendo influenciada por treinamento”. As transformações espaciais que são manipuladas pelos alunos, são realizadas com base teórica nas transformações geométricas, das quais a Geometria Projetiva fundamenta a representação gráfica. Segundo Bustamante (1994, p. 42):

A Geometria Descritiva pode ser considerada como um caso particular da Geometria Projetiva porque está submetida aos conceitos por ela emitidos (G. Projetiva). As operações projetivas e suas propriedades se aplicam a Geometria Descritiva.

Ao nos depararmos com o ensino do Geometria Descritiva, hoje fora da escolarização básica e fundamental, e parcamente ensinada nas universidades, em cursos como arquitetura, design, artes e engenharias, nos apropriamos das palavras de Almeida Neto (1994, p. 59), ao dizer que o “*desenho empobrece, perdendo todo o esplendor conceitual que a Geometria Descritiva e a Geometria Projetiva lhe davam. Torna-se apenas uma técnica. E seus professores, meros instrutores de alunos a ser adestrados*”, quando não se conhece os aportes teóricos que respaldam todo o traçado, ou construção.

Bustamante (1994) ainda defende que o ensino da Geometria Descritiva se fundamente na Geometria Projetiva, porque esta apresenta ampla e geral fundamentação lógica de conceitos básicos que possibilitam tirar conclusões, fazer adaptações, simplificações de eficientes resultados.

A partir deste arcabouço teórico, que nos mostra a relação da Geometria Descritiva com a Geometria Projetiva, realizaremos o traçado das seções e ao mesmo tempo dos elementos da Homologia. Deste modo, primeiramente empreendemos uma pesquisa bibliográfica do tema abordado neste artigo para depois averiguar a Projetividade presente nas seções planas.

A obra de Costa e Costa (1994), procura apresentar a estrutura das transformações projetivas para permitir a compreensão da importância desta nos sistemas de representação usuais. No mesmo sentido, Soares (1962) busca exibir a teoria projetiva e sua relação com a Geometria Descritiva. Finalmente, Melo (1993), realiza uma monografia que apresenta cada um dos elementos projetivos presentes no traçado das perspectivas cônicas (ainda que omitidos ou renomeados).

Assim sendo, partindo da Geometria Projetiva, mais precisamente, da Homologia, vamos analisar algumas seções planas (no cone, no cilindro, na pirâmide e no prisma), destacando a presença dos elementos da Homologia na obtenção de cada uma delas, e com base nos autores mencionados.

2.1. Homologia

A Homologia é um caso de perspectividade entre os elementos do objeto e da imagem, onde um elemento duplo (reta dupla de pontos duplos ou eixo de homologia) permite a transformação de um para o outro por meio de um único centro de projetividade (S).

Figura 4 - Teorema de Desargues

Fonte: a autora (2021)

O teorema de Desargues enuncia que se projetamos um triângulo do plano projetivo objeto de vértices A, B, C , desde um ponto S , obtemos outro triângulo imagem de vértices A', B', C' , e dizemos que os dois triângulos são perspectivos desde o centro S . Então, dois triângulos são perspectivos *se e somente se* os lados correspondentes se cortam em três pontos alinhados (reta dupla de pontos duplos - eixo de homologia e).

A reta $\alpha\alpha'$ será o chamado eixo de Homologia (lugar dos pontos duplos onde imagem e objeto coincidem $X=X', Y=Y'$ e $Z=Z'$).

2.1.1. Retas limites - Eixos de Fuga e Eixo de Desvanecimento

Se tomamos pelo centro de homologia S um plano paralelo ao plano objeto cortaremos o plano imagem na reta limite que será f' (eixo de fuga) que corresponderá à imagem de todos os pontos do objeto que estarão no infinito (SOARES, 1962; MELO, 2017), como se pode verificar na figura 5 a seguir.

Figura 5 – Eixo de fuga (f')

Fonte: a autora (2021)

Igualmente, se traçamos pelo centro S um plano paralelo ao plano imagem, cortaremos o plano objeto na reta d (eixo de desvanecimento) que corresponderá aos pontos do objeto que estarão no infinito (SOARES, 1962; MELO, 2017), tal como podemos verificar na figura 6.

Figura 6 – Eixo de Desvanecimento (d)

Fonte: a autora (2021)

O centro de homologia S e os eixos e , f' e d mantêm uma relação de distância de tal forma que:

$$S \Leftrightarrow d = e \Leftrightarrow f'$$

$$S \Leftrightarrow f' = e \Leftrightarrow d$$

Como tais eixos são gerados por um sistema de planos paralelos dois a dois, a distância de uma delas ao eixo e , é a mesma que a distância da outra ao centro de projetividade, e vice-versa. Por este motivo, também as retas limites serão paralelas ao eixo e . Ambas propriedades se manterão quando o sistema seja estabelecido em planos sobrepostos e representado num único plano euclidiano (SOARES, 1962; ABAJO e BENGIOA, 2006; MELO, 2020). Também os três eixos da homologia são paralelos entre si: $d \parallel e \parallel f'$. A seguir vemos a figura 7 que mostra o esquema da situação vista de perfil:

Figura 7 – Esquema de paralelismo e distância entre os elementos de uma Homologia qualquer

Fonte: a autora (2021)

2.1.2. A Reta Polar e seu Polo

Segundo FIC (1968, p. 453), no teorema sobre a propriedade Polo e Polar, “[...] por um ponto P, dado no plano de um círculo, tira-se uma secante qualquer PDC; o lugar do ponto G, conjugado harmônico do ponto P em relação às extremidades da corda CD, é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa pelo ponto P.”. Podemos observar a construção na figura 8, a seguir:

Figura 8 – Polo Polar baseada na figura 519 de FIC, página 453 (1968).

Fonte: a autora (2021)

A polar de um ponto dado é o lugar geométrico do conjunto harmônico deste ponto – é a reta polar de um ponto

Quando a Polar corta a circunferência, o seu Polo estará fora da curva; quando a Polar tangenciar a curva o Polo estará no mesmo ponto de tangência; finalmente, para a Polar fora da curva, o Polo estará no interior da curva.

Na projetividade entre retas sobrepostas em Involução (COSTA e COSTA, 1994), vemos que a Reta de Steiner será a Reta Polar da circunferência utilizada para encontrar os homólogos objeto e imagem, e que o seu Polo estará dentro ou fora da circunferência conforme a posição da mesma em relação àquela circunferência. A posição da Reta de Steiner, então, determinará o tipo de projetividade entre as retas: reta passando fora da circunferência – projetividade elíptica; reta tangenciando a circunferência – parabólica; reta secante a circunferência – hiperbólica. Nestes casos a projetividade apresentará 0 (zero) ponto duplo, 1 (um) ponto duplo e 2 (dois) pontos duplos.

Figura 9 – Tipo de Projetividade

Fonte: a autora (2021)

Nas transformações homológicas das curvas cônicas, vemos que o eixo de desvanecimento, será a Reta Polar da transformação da curva objeto com respeito a sua transformada – imagem. O Polo com respeito àquela Polar, será o novo centro da curva imagem – transformada do objeto (COSTA e COSTA, 1994; MELO, 2020).

3. ANÁLISE DAS SEÇÕES PLANAS

Analisaremos a seguir as seções planas realizadas em superfícies curvas – cones e cilindros – e em superfícies poliédricas – pirâmides e prismas – de modo que possamos verificar a presença dos elementos projetivos da Homologia em cada um dos casos, e estabelecermos assim um paralelo entre a Homologia e as seções planas. Finalmente, destacamos que todas as seções realizadas e analisadas aqui, podem ser estendidas para seções de maneira geral.

Costa e Costa (1994), já destacam que as projeções dos objetos sobre os planos, e as operações realizadas neste sistema – tal como o rebatimento –, estabelecem-se por meio de uma perspectividade, uma vez que cada par de pontos homólogos se localiza em linhas de chamada paralelas entre si – centro S impróprio –, característica descoberta por Monge, e tratando-se de um caso de afinidade homológica.

Também Soares (1962), direciona seu trabalho para uma aplicação prática da Geometria Projetiva à Descritiva e procura estudar a correspondência homológica entre duas figuras no espaço, projetadas a partir de um centro fixo, destacando que este é o caso típico da seção plana de um sólido.

3.1 Caso 1 - Seção plana no cone

Na explicação nº 376, página 280, FIC (1960), justifica o traçado da seção realizada por um plano oblíquo ao eixo do cone reto, demonstrando que a elipse estabelecida em tal seção apresenta seu centro fora do eixo daquela superfície cônica. Na mesma explicação, é destacado que na projeção em π_1 , o vértice do cone, será um dos focos da curva-seção, no caso, uma elipse. Segundo a posição do plano de seção em relação ao eixo do cone, a curva encontrada poderá ser ainda uma parábola, uma hipérbole ou uma circunferência. Tal como na transformação de curva realizada na Geometria Projetiva, a curva imagem manterá a natureza da curva objeto, ou seja, será uma curva de 2º grau.

Como veremos na discussão desta seção como um caso de homologia, a transformação de uma circunferência em uma elipse ocasiona que o centro da nova curva – figura imagem – será o Polo da Reta Polar e não o centro da figura objeto – circunferência, sendo a Reta Polar, o eixo de desvanecimento d .

Figura 10 – Seção por um plano α num cone reto

Fonte: a autora (2021)

O Plano de seção α – oblíquo ao eixo do cone reto – seccionará o mesmo. A seção cônica realizada – que nesse caso corresponde a uma elipse –, será a transformação da circunferência da base do cone – plano objeto – pelo centro de homologia $S = V$ (vértice), tal como vemos na figura 10.

O traço do plano α em π_1 – plano que contém a base do cone – corresponde ao eixo de homologia e ($\alpha \pi_1$). Traçando pelo centro S um plano paralelo ao plano da seção e interceptando o mesmo com o plano π_1 , encontraremos o eixo de desvanecimento d , lugar próprio de todos os pontos impróprios da imagem. O eixo de fuga f' – lugar de todos os pontos próprios que correspondem aos pontos impróprios do objeto –, será conseguido ao traçarmos pelo centro S um plano paralelo ao plano objeto (π_1) com a interseção com o plano imagem α . Na figura 7, apresentada na seção anterior, podemos verificar as relações de posição e distância entre o centro S , os eixos e , f' e d . Nesta situação, temos um caso geral de Homologia.

3.2 Caso 2 - seção plana no cilindro

Na seção de um cilindro por um plano oblíquo ao eixo do mesmo – a elipse resultante será a imagem da base do cilindro assentada sobre o plano π_1 . O centro de homologia (S) estará no infinito na direção das geratrizes do cilindro. Como o centro S está no infinito, os eixos de fuga f' e de desvanecimento d serão impróprios. O traço $\alpha \pi_1$ corresponderá ao eixo de homologia e , a reta dupla de pontos duplos comum ao plano objeto e ao plano imagem, nas palavras de Soares (1962), todos os pontos são homólogos de si

mesmos. Mais precisamente, teríamos um caso de Afinidade Homológica (RODRIGUES, 1968; COSTA e COSTA, 1994).

Figura 11 – seção por um plano α no cilindro reto

Fonte: a autora (2021)

Sendo um caso, onde o centro S é impróprio e os eixos ou retas limites também são impróprios, o centro da curva imagem – elipse – coincidirá com o centro da curva objeto – circunferência da base do cilindro. O Polo é o próprio centro C da curva e a Polar estará no infinito. Senão, vejamos: ao traçarmos pelo centro $C = \text{Polo}$, as secantes AB e DE , e ao traçarmos por suas extremidades as tangentes t_1, t_2 e t_3, t_4 , respectivamente, as retas serão paralelas entre si e encontrarão a Polar no infinito, conforme a figura 12.

Figura 12 – Polo Polar, com Polo = Centro da circunferência

Fonte: a autora (2021)

Segundo o teorema apresentado em FIC (1968, p. 474), “a seção dum cilindro de revolução por um plano que corta todas as geratrizes é uma elipse, que tem por eixo menor, o diâmetro do cilindro”. Tal condição pode ser verificada na V.G. da elipse rebatida sobre a vista em π_2 (figura 11), na qual ainda podemos verificar a coincidência dos centros das duas curvas.

3.3 Caso 3 - Seção plana na pirâmide

Analogamente, as seções realizadas nas pirâmides assumem as mesmas relações homológicas das seções realizadas nos cones, tal como veremos na discussão seguinte.

No exercício 3.5.3, Costa e Costa (1994), mostram a presença dos elementos da homologia na seção realizada numa pirâmide de base triangular.

Na figura 13, podemos observar que o vértice da pirâmide cortada será o Centro de Homologia (S), a base da pirâmide ($ABCD$), assentada no Plano π_1 será o objeto e a seção realizada ($A'B'C'D'$) será a imagem. O traço do plano da seção $\alpha\pi_1$, será o eixo de homologia e .

Figura 13 – seção por um plano α numa pirâmide reta

Fonte: a autora (2021)

Ao traçarmos pelo centro S um plano paralelo ao plano da seção α , encontramos em $\pi 1$, o eixo de desvanecimento d . O eixo de fuga f' , será o traço do plano paralelo à base $ABCD$, traçado pelo centro S , que corta o plano imagem α – plano da seção. Tal como no cone, temos um caso geral de Homologia.

3.4 Caso 4 - Seção plana no prisma

Ao seccionarmos um prisma por um plano que corta todas as suas arestas obtemos um polígono de número de lados igual ao número de lados da base do prisma seccionado. A seção será a imagem da base do prisma assentado em $\pi 1$. O centro de homologia S será impróprio na direção das arestas do prisma seccionado. Tal como no caso do cilindro, sendo S impróprio, os eixos de fuga f' e de desvanecimento d , serão também impróprios. O eixo de homologia e , por sua vez, será o traço $\alpha\pi 1$ no plano objeto.

Figura 14 – seção pelo plano α no prisma de base quadrangular

Fonte: a autora (2021)

Novamente, teríamos um caso de Afinidade Homológica (RODRIGUES, 1968; COSTA e COSTA, 1994).

Para finalizarmos a nossa, análise, apoiamos a nossa defesa na discussão e apresentação do Teorema de Desargues realizada por Costa e Costa (1994), tal como se pode observar na figura 15. No referido texto os autores destacam os planos α , β e γ , formados por retas homólogas –objeto e imagem – cujas interseções, são as projetantes $AA'S$, $BB'S$ e $CC'S$, de tal forma que a figura gerada nada mais é que uma pirâmide de base em α' , de vértice S , cortada pelo plano α . Descrição semelhante, apresenta Soares (1962) ao apresentar o mesmo teorema e retas limites dos planos imagem e objeto, respectivamente d e f). Do mesmo modo, ao enunciar a definição da pintura pelo uso do perspectógrafo, Alberti (1547), se refere a ela [pintura], como sendo a seção de uma pirâmide cuja base é o objeto real a ser retratado, e cujo centro é o olho do pintor.

Figura 15 – Homologia – Teorema de Desargues

Fonte: Costa e Costa, p. 148 (1994)

Deste modo, pintura e teorema de Desargues, descrevem a mesma figura geométrica – no sentido teórico e idealizado – que materializamos ao realizar as seções por meio da linguagem gráfica, ou seja, o desenho.

4. CONCLUSÕES

Todas as projeções realizadas dos elementos geométricos (sólidos ou entes primitivos) são operações projetivas homológicas, onde podemos ter o centro S próprio, para o caso das projeções cônicas; ou o centro S impróprio, para o caso das projeções cilíndricas.

Outrossim, as próprias seções planas realizadas nas superfícies curvas ou poliédricas, são casos de transformações projetivas com respeito as bases das mesmas. Elas podem ser consideradas a transformação da base por um centro S próprio (vértice), nos casos dos cones e pirâmides; ou um caso de S impróprio (direção das arestas ou geratrizes), nos casos de cilindros e primas. Respectivamente, teremos um caso geral de Homologia ou um caso de Afinidade Homológica.

Todos os elementos da homologia se encontram presentes e determinados para cada uma das situações, sejam eles próprios ou impróprios, mantendo ainda suas relações de paralelismo ($e // f // d$) e distância ($d \longleftrightarrow e = f \longleftrightarrow S$; $d \longleftrightarrow S = e \longleftrightarrow f$).

Ainda ressaltamos, que o cone pode ser considerado como uma pirâmide com um número infinito de lados, onde a base se aproxima da

circunferência; e o cilindro, como um prisma de um número infinito de lados, cuja base também se aproxima da circunferência. Além disso, o cilindro pode ser considerado como um cone, cujo vértice está no infinito; e o prisma, como uma pirâmide cujo vértice também está no infinito.

Apoiando-nos ainda no pensamento de Diderot em *L'interpretazione della natura* (1753 apud CONSIGLIO, 2014), de que na matemática, examinando todas as propriedades de uma curva – no caso, as cônicas –, não encontramos nada além da mesma propriedade apresentada em diferentes aspectos, ou seja, a elipse é equivalente à circunferência, podemos tomar a seção que se apresenta como tal curva como uma transformação da circunferência. Isso reforça nossa análise das seções planas como casos de homologias.

Assim sendo, estas figuras e suas seções podem ser consideradas desde a ótica das Transformações Projetivas, especificamente, dentro de casos da Homologia, onde podemos encontrar os seus elementos, quais sejam o eixo de homologia e , as retas limites d e f , e o centro de homologia S , tal como apresentamos nos casos estudados neste trabalho.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAJO, F J R; BENGUA, V A. "Transformaciones Geométricas", **Dibujo Técnico II: 2º Bachillerato**. Barcelona: Editorial Donostiarra, 2006, p.37-58. ISBN: 978-84-7063-299- 0.
- ALBERTI, L B. **La Pittura**. Veneza: 1547. Tradução de Lodovico Domenichi. Disponível em: <http://dlib.bibl.hertiz.it/perspectiva/doc09.I.html>. Acesso em 10 de maio de 2019.
- ALMEIDA-NETO, J de T P. A. "Geometria Projetiva e seu Papel na Geometria Descritiva", in **Anais do 11º Simpósio de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. Recife: Gráfica da ETFPE, p. 54-61, v. 1, 1994.
- BUSTAMANTE, L S. "Geometria Projetiva e seu Papel na Geometria Descritiva", in **Anais do 11º Simpósio de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. Recife: Gráfica da ETFPE, p. 41-53, v. 1, 1994.
- CAVALCANTI, A C; V R MELO; F A M, SOUZA. "Habilidades Profissionais Colaborativas para Engenheiros por meio da Geometria Descritiva", **REVISTA GEOMETRIA GRÁFICA**, Recife, v.3, n.1: P70-P82, 2019.
- CONSIGLIO, F. "Il concetto di Natura nella filosofia di Denis Diderot", **Alia: revista de estudios transversales**, Nº. 3, 2014, p. 7-22. ISSN-e 2014-203X. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4747940>. Acesso em: 29 de maio de 2020.

COSTA, M D. "Geometria Projetiva e seu Papel na Geometria Descritiva", in **Anais do 11º Simpósio de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**.

Recife: Gráfica da ETFPE, p. 62-73, v.1, 1994.

COSTA, M. D.; COSTA, A. **Geometria Gráfica Tridimensional**. Vol. 03. Recife: Editora Universitária, 1994.

FIALHO, F A P; ULBRICHT, V; SANTOS, N. "O emprego da Geometria Projetiva na axonometria", in **Anais do 11º Simpósio de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. Recife: Gráfica da ETFPE, p. 154-160, v. 1, 1994.

F.I.C. **Elementos de Geometria Descritiva**. 16a Edição. Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia, 1960. Tradução e adaptação Eugenio B. Raja Gabaglia.

GUISIN, L. Transformaciones geométricas, **Revista de Educación Matemática**, v. 15, n. 3, 11, 2000.

MARIOTTI, M. A. **A geometria em sala de aula: reflexões sobre ensino e aprendizagem**. Recife: Editora UFPE, 2019. Tradutora: Sandra de Souza Melo. 232 p.

MELO, S de S. "Un análisis estético-homológico de un artista surrealista contemporáneo", in **Revista Geometría Gráfica**, v. 1, n. 1 (2017). P. 61-80.

_____. **As Relações Projetivas no Sistema Cônico**. Recife: 1993. Monografia de conclusão de curso de especialização.

_____. **As transformações geométricas: isometrias, semelhanças, afinidades, projetividades**. Recife: autora, 2020. Apostila de Geometria Projetiva.

NETO, A; PIZA, J de T. "Geometria Projetiva e seu Papel na Geometria Descritiva" In **Anais do 11º Simpósio de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. Recife: Gráfica da ETFPE, 1994.

NETO, F Q. **Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ – Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2008. 319 p.

PINHEIRO, V A. **Geometrografia 2**. Rio de Janeiro: Aula Editora, 1986.

RODRIGUES, A J. **Geometria Descritiva - Projetividades Curvas e Superfícies**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1968.

SANCHEZ-MARMOL, L; PEREZ-BEATO, M. **Geometría Métrica, Projectiva y Sistemas de Representación**. 2ª edição. Volume I. Madri: SAETA, 1945.

SOARES, M L. **Fundamentos da Geometria Projetiva aplicados à Descritiva**. Maceió: Escola de Engenharia da Universidade de Alagoas, 1962.

VALCARCE, P R A. "O Ensino da Geometria nas Faculdades Federais de Arquitetura e Urbanismo do estado do Rio de Janeiro". **Revista Geometria Gráfica**, v. 2, n. 2 (2018).

Artigo recebido em 18/04/2021 e aceito em 21/05/2021