

**ANÁLISE DE MÉTODOS CONTABILOMÉTRICOS PARA
DETERMINAÇÃO DE CONFORMIDADE DA LEI NEWCOMB-BENFORD
APLICADOS À AUDITORIA CONTÁBIL**

**AN ANALYSIS OF BENFORD'S LAW CONFORMITY CONTABILOMETRIC
METHODS APPLIED TO AUDIT ACCOUNTING**

José Isídio de Freitas Costa¹
Diogo Brandão Borborema Henriques²
Sílvio de Barros Melo³
Josenildo dos Santos⁴

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar os métodos contabilométricos para determinação de conformidade com a Lei de Newcomb-Benford aplicados à auditoria contábil. Ressalta-se que a determinação do desvio entre a média observada com a média esperada não é suficiente para avaliar a conformidade da distribuição, uma vez que a composição dos desvios pode chegar inclusive a anular o efeito das distorções na média observada. Conclui-se dos resultados que os testes locais são mais adequados ao planejamento das auditorias e os testes globais funcionam melhor como indicadores gerenciais de apoio à tomada de decisão.

Palavras-chave: Lei de Newcom-Benford. Testes. Auditoria. Despesas Públicas.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze contabilometric methods to determine compliance with Newcomb-Benford's Law applied to accounting audit. It is emphasized that the determination of the deviation between the mean observed with expected average is not sufficient to assess compliance of the distribution, since the composition of the deviations can even nullify the effect of the distortions on the observed average. We conclude that the results of local tests are best suited to the planning of audits and tests as indicators work better overall management support for decision making.

Keywords: Newcomb-Benford's Law. Tests. Auditing. Public Expenditure.

¹ Mestre em Ciências Contábeis pela UFPE, técnico em auditoria pelo Tribunal de Contas do Estado de Pernambuco. E-mail: jsidio@tce.pe.gov.br.

² Mestre em Ciência da Computação Pelo Centro de Informática CIn - UFPE, professor substituto do departamento de contabilidade e ciências atuariais. E-mail: dborbo@gmail.com.

³ Pós-doutor pela Universidade de Bergen, doutor em computer science pela Arizona State University, professor do Centro de Informática - UFPE. E-mail: sbm@cin.ufpe.br.

⁴ Pós-Doutor em Contabilidade e Atuária pela USP-FEA(2006), doutor em Matemática pela University of Wisconsin - Madison (1987), professor do Centro de Ciências Sociais Aplicadas - UFPE. E-mail: jsnipcontabeis@yahoo.com.br.

1 Introdução

O boom de publicações observado nas diversas áreas do conhecimento científico no final do século XX também se refletiu em relação às pesquisas da lei de Newcomb-Benford, principalmente na sua aplicação na auditoria contábil. O aumento observado das publicações representou uma fluência na discussão das metodologias e técnicas tanto recém-criadas como advindas de diversas áreas do conhecimento.

Com a utilização de métodos e técnicas interdisciplinares para auxílio à geração informações contábeis, e valendo-se também das análises de profissionais especializados para o entendimento das mesmas, pode-se considerar num contexto aplicável do uso da Contabilometria, por utilizar-se de métodos e técnicas quantitativas das ciências puras e também dos aspectos qualitativos aplicados na Ciência Contábil.

Dessa forma o objetivo desse trabalho consiste em analisar e avaliar os métodos contabilométricos, outrora vistos em outros contextos como análises matemáticas e testes estatísticos, para determinação da conformidade de dados advindos de auditorias contábeis com a Lei de Newcomb-Benford.

A questão que norteia este trabalho consiste em: *Quais os principais métodos presentes na literatura estudada na aplicação da Lei de Newcomb-Benford à auditoria contábil e suas características?*

Justifica-se este estudo como instrumento identificador e avaliador de métodos contabilométricos fundamentados na análise de conformidade com a Lei de Newcomb-Benford aplicada à auditoria contábil. Os numerosos trabalhos realizados sobre o tema, também justificam a realização de um apanhado geral sobre os métodos utilizados, como forma de auxiliar pesquisas futuras e agregar conhecimento científico. Por outro lado, esta pesquisa visa estimular o debate e discussão de ideias inovadoras sobre a teoria e aplicação de modelos de detecção de desvios-padrões ao agregar diferentes metodologias e suas possíveis aplicações.

O artigo é constituído de seis seções, iniciando com essa introdução, na próxima seção é apresentado a NB-Lei na auditoria, enquanto que a terceira seção discute os métodos contabilométricos com aplicação da NB-Lei à auditoria contábil, na quarta seção é apresentado o proceder metodológico utilizado nesta pesquisa, a quinta seção traz a análise e interpretação dos dados e na sexta seção são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 A Lei de Newcomb-Benford aplicada à auditoria

A Lei de Newcomb-Benford afirma que os dígitos em uma sequência de números naturalmente ocorrentes não aparecem com a mesma proporção, como pode supor um Leigo. Na verdade, os dígitos menores possuem maior probabilidade de forma que os logaritmos de suas mantissas sejam equiprováveis.

Este fenômeno foi descoberto inicialmente por Simon Newcomb (1881) quando observou que as tábuas de logaritmos estavam mais desgastadas nas primeiras páginas, mostrando que as pessoas procuravam mais pelo dígito 1 do que o 9. O mesmo fenômeno foi redescoberto, em pesquisas independentes, por Frank Benford (1938) fazendo uma análise mais aprofundada em 20.229 dados de diversas fontes: áreas de rios, números de casas de uma rua, etc.

O uso de testes estatísticos, no contexto da NB-Lei aplicada à auditoria, foi introduzido por Carslaw (1988) com a utilização do Z-Teste e χ^2 -Teste para os desvios entre as probabilidades esperadas e observadas para os dígitos da primeira e segunda posição separadamente. Carslaw (1988) e Thomas (1989) documentaram empiricamente que nos lucros divulgados de empresas da Nova Zelândia e dos Estados Unidos, respectivamente, existiam arredondamentos ou padrões incomuns.

Nigrini expandiu os testes aplicados com a inclusão do Fator de Distorção (FD) (NIGRINI, 1992) e da Média dos Desvios Absolutos (MAD) (NIGRINI, 1997). Dos Santos et al. (2008) fez uma aplicação da NB-Lei e sua relação com os testes de hipóteses (Z-Teste e o χ^2 -Teste) para auxílio da auditoria do tributo do ISS. Costa, Santos e Travassos (2011) utilizaram o Z-Teste e o χ^2 -Teste, aplicados na NB-Lei, para detectar irregularidades na despesa pública de dois Estados.

Partindo-se da hipótese válida de que a NB-Lei é uma Lei matemática que governa a distribuição natural dos dígitos que compõe os números, a ocorrência de desvios de conformidade na distribuição dos dígitos em relação às frequências previstas na Lei em tela evidenciaria a interferência do ser humano (DINIZ; CORRAR; SLOMSKI, 2010).

Contudo, vale ressaltar que os desvios de conformidade observados em relação à Lei não são necessariamente indicativos de fraudes/erros, bem como a sua conformidade não exige a possibilidade de ocorrência destas irregularidades. Mudanças no comportamento esperado para os dígitos podem estar relacionadas a fatores normativos de ordem legal. Para dirimir tais dúvidas, faz-se necessária a atuação do auditor, mediante a aplicação dos testes e procedimentos de revisão analítica. Iudícibus (1982) já alertava a essa necessidade ao afirmar que a aplicação dos métodos quantitativos na contabilidade não é suficiente, pois, se demonstra imprescindível uma avaliação qualitativa por parte do usuário do método.

Nesse contexto de aplicação da NB-Lei à auditoria, vale ressaltar a importância da utilização da Auditoria Contínua (AC). Segundo Vasarhelyi e Halper (1991) a AC caracteriza-se por produzir resultados simultâneos, ou em pequenos períodos de tempo, após a ocorrência do evento relevante controlado. Costa, Santos e Travassos (2011) ressaltam que o exercício deste controle concomitante tem na tempestividade o seu melhor atributo, quando comparado ao modelo de auditoria tradicional, *a posteriori*.

3 Discussão dos métodos contabilométricos com aplicação da NB-Lei à auditoria contábil

No material referencial a respeito da NB-Lei, foram identificados pelo menos 10 métodos distintos utilizados na determinação de desvios quanto à conformidade de um conjunto de dados com a NB-Lei. Dentre os quais, integraram o objeto de estudo deste trabalho os seguintes: a) Z-Teste; b) Teste Quiquadrado - χ^2 ; c) Discrepância Relativa (Δ_o); d) Desvio Absoluto (DA); e) Teste de Kolmogorov-Smirnov Discreto (K-S discreto); f) Desvio na Média da Convolução (DMC); g) Fator de Distorção (DF); h) Lógica Nebulosa, fazendo-se ainda referência à utilização de Redes Neurais e *Artificial Immune System for Fraud Detection* (AISFK).

Os testes objetivam determinar, em um padrão escalar, o quanto uma série de dados testada possui de conformidade em relação a uma propriedade da Lei de Newcomb-Benford. Foram identificados no presente trabalho testes relacionados as seguintes propriedades: proporção de ocorrência dos dígitos; média específica da distribuição, propriedade da invariância escalar de base e equiprobabilidade das mantissas.

A taxonomia para esse estudo consiste em Proporção, Invariância, Média e Outros Testes, conforme apresentado a seguir:

3.1 Testes de Proporção

Os testes de proporção são os mais numerosos e caracterizam-se por verificarem a conformidade entre a proporção observada (po) de ocorrência para um dígito ou conjunto de dígitos com a sua correspondente probabilidade de ocorrência (pe) prevista na NB-Lei, podendo ser aplicados de forma local ou global. No primeiro caso aplica-se o teste na verificação da conformidade de uma única proporção associada a um único dígito ou cadeia de dígitos em posições sequenciadas. A aplicação global sintetiza em sim a análise conjunta de vários testes locais.

Os testes de proporção locais, por possuírem uma maior restrição em seu escopo de análise, possibilitam uma maior precisão na localização dos desvios, sendo, por esta razão, capazes de subsidiar as equipes de auditoria na seleção dos dados que integrarão a sua

amostra de análise, numa contribuição direta ao planejamento e execução das auditorias. São exemplos destes testes a discrepância relativa (Δ_o) e a estatística Z (Z-Teste).

Como visto em Costa, Santos e Travassos, 2011 os testes globais são mais adequados como indicadores gerenciais, prestando-se como mais um índice sintético de apoio à tomada de decisão pelos gerentes, com repercussão na otimização dos resultados mediante a alocação dos recursos às áreas ou entidades consideradas como prioritárias. São exemplos destes testes o desvio absoluto, com suas variantes MAD e $DA/2$, o teste quiquadrado (χ^2) e o KS discreto.

Na determinação dos valores das probabilidades previstas (pe) a fórmula de ouro, dada pela expressão $\text{Prob}(d) = \log_{10}(1+1/d)$, pode ser aplicada aos dígitos d (1, 2... 9) da primeira posição ou para qualquer sequência de dígitos com o primeiro significativo iniciado na primeira posição. Outras fórmulas são empregadas no cálculo das probabilidade dos dígitos para a segunda Hill (1996) e demais posições Posch (2008), individualmente consideradas. Entretanto, conforme evidenciado por Hill (1998) com a sua fórmula de probabilidade condicionada em relação a posição anterior, para uma correta avaliação de conformidade com uma distribuição Newcomb-Benford deverá ser considerada não só as probabilidades de ocorrências nas posições individualmente consideradas, mas também as probabilidades associativas às posições anteriores.

3.1.1 Z-Teste

O Z-Teste estudado possui a finalidade de avaliar a hipótese sobre uma proporção observada. Para Levine *et al* (2008) o Z-Teste é utilizado como parâmetro de aceitação ou rejeição na hipótese para a diferença entre a proporção da amostra (po) e a proporção da população especificada (pe) quando “a distribuição de amostragens desta proporção segue, aproximadamente, uma distribuição normal”. O Z-Teste foi aplicado por Carslaw (1988) como medida de significância estatística na determinação das diferenças entre as distribuições das proporções observadas (po) e esperadas (pe).

Este teste foi utilizado diversos autores na detecção de desvios de conformidade em dados financeiros, a exemplo de Busta e Weinberg (1998), Santos, Corrar e Diniz (2005), Nigrini e Miller (2009), Krakar e Zgela (2009), os quais utilizaram um nível de significância $\alpha = 0,05$ com um Z crítico de 1,96.

Na presente pesquisa foi utilizada a fórmula do Z-Teste para a proporção em termos do número de observações (PO) citada por Levine *et al* (2008), a qual desconsidera a utilização do efeito redutor do termo de correção de continuidade $1/2n$ e não utiliza o módulo no cálculo do desvio, a qual pode ser reescrita na forma a seguir:

$$Z = \frac{PO - PE}{\sqrt{PE(1 - pe)}} \quad (1)$$

Onde (PO) é o número de observações na amostra para o dígito e posição analisados e (PE) é a quantidade esperada para o dígito e posição, definida por: $PE = pe \times n$ (tamanho da amostra).

Foi dada preferência à utilização do cálculo do desvio na sua forma não absoluta, $PO - PE$, uma vez que a evidenciação do seu sinal possibilita a diferenciação na ocorrência dos desvios por excesso ($PO > PE$) daqueles provocados pela sua falta ($PO < PE$). Neste caso torna-se necessário observar que a rejeição ocorrerá quando $|Z| > Z$ crítico. Para o nível de significância $\alpha = 0,05$ será rejeitada a hipótese de inexistência de desvios significativos quando $Z < -1,96$ ou $Z > 1,96$.

Partindo-se da fórmula 2, temos que o intervalo de confiança para a proporção observada será definido pelas bandas superior e inferior, mediante a utilização das seguintes fórmulas:

$$\text{Banda Superior} = pe + Zc \frac{\sqrt{PE(1 - pe)}}{n} \quad (2)$$

$$\text{Banda Inferior} = pe - Zc \frac{\sqrt{PE(1 - pe)}}{n} \quad (3)$$

Alguns autores observaram que o Z-Teste sofre influência em razão do tamanho do conjunto dos dados analisados, tornando-se um teste cada vez mais rigoroso a medida que cresce o número de elementos, provocando o que eles denominaram de “excesso de poder”, (KRAKAR; ZGELA, 2009; NIGRINI; MITTERMAIER, 1997).

3.1.2 O Teste χ^2

Pode-se entender o χ^2 como um teste de hipótese destinado a encontrar um valor de dispersão entre duas variáveis numéricas, possuindo o claro propósito de determinar um nível de conformidade entre dois conjuntos de dados. O χ^2 é um teste estatístico aplicado de forma global na análise dos desvios em uma ou mais posições.

O χ^2 é um teste estatístico de proporção que foi aplicado por Carslaw (1988) para determinar se as proporções de uma distribuição como um todo, considerando-se todos os dígitos e seus desvios de forma conjunta, estavam em conformidade com as proporções esperadas pe para os dígitos da posição investigada, tendo-se utilizado das seguintes fórmulas:

$$\chi^2 = \sum_{d=1}^9 \frac{(PO - PE)^2}{PE} \quad e \quad \chi^2 = \sum_{d=0}^9 \frac{(PO - PE)^2}{PE} \quad (4)$$

A primeira fórmula é utilizada para a análise da 1ª posição e a segunda fórmula para as demais posições, com PO sendo a frequência observada para o dígito e PE a frequência esperada para o dígito e posição, definida por: $PE = pe \times n$ (tamanho da amostra).

Similar ao Z-Teste, o χ^2 também apresenta o problema em razão do tamanho do conjunto dos dados analisados, tornando-se um teste cada vez mais rigoroso a medida que cresce o número de elementos, (KRAKAR; ZGELA, 2009, NIGRINI; MITTERMAIER, 1997).

Diferentemente do Z-Teste, que é aplicado de forma local, o teste χ^2 reflete os desvios existentes em todos os dígitos de uma ou mais posições, os quais são somados para compor o seu valor crítico.

3.1.3 Desvio Absoluto

Na literatura este teste foi um dos primeiros a ser utilizado na determinação da conformidade com a NB-Lei, mediante a aplicação respectiva das seguintes fórmulas para a primeira e demais posições:

$$DA = \sum_{d=1}^9 |po - pe| \quad e \quad DA = \sum_{d=0}^9 |po - pe| \quad (5)$$

Ressalte-se que este teste possui um grau de liberdade a mais que a distribuição, fazendo com que todo desvio positivo gerado em um dígito provoque um desvio negativo na mesma ordem para outro dígito. Desta forma, não fossem os desvios tomados em sua forma absoluta, seu somatório seria nulo para qualquer situação analisada.

Nigrini (1997) utilizou o desvio absoluto médio *Mean Absolute Deviation* (MAD), obtendo-o pela divisão do somatório dos desvios absolutos pela quantidade de dígitos significativos (9 para a primeira posição e 10 para as demais, mediante o seguinte cálculo:

$$MAD = \sum_{d=1}^9 \frac{|po - pe|}{9} \quad e \quad MAD = \sum_{d=0}^9 \frac{|po - pe|}{10} \quad (6)$$

Krakar e Zgela (2009) ressaltam que o *MAD* não possui limites ou intervalos sobre os quais se possam afirmar que o desvio é significativo ou não, tal como ocorre com o Z-Teste e o χ^2 , ficando esta interpretação a cargo do analista. Outra característica diferenciadora do *MAD* em relação aos dois testes anteriores é que ele não é afetado pelo tamanho do conjunto dos dados, o mesmo ocorrendo com o teste do desvio absoluto e da discrepância relativa. Ainda em relação aos testes *DA* e *MAD*, vê-se a possibilidade de sua aplicação tanto na forma local, para um único dígito ou sequência de dígitos, como na forma global pela soma dos desvios observados em uma ou mais posições.

Visto que o pressuposto para a aplicação da análise consiste na detecção dos fatores humanos que explicam a ocorrência dos desvios, ou seja, a inclusão de dados não conformes ao conjunto previamente conforme, vê-se que os desvios nos dígitos indicativos de excessos, onde $po > pe$, assumem um papel de maior importância em relação aos desvios por falta, onde $po < pe$. Isto ocorre porque considerando um lote de valores inseridos, o dígito mais freqüente no lote causará o maior desvio positivo. Os demais dígitos poderão ou não possuir um desvio positivo dependendo de sua frequência e do tamanho do lote em relação a distribuição porém, apenas o dígito mais freqüente causará um desvio garantidamente positivo.

Isto posto, propõe-se neste trabalho a utilização do semi-desvio absoluto (DA/2) como medida de conformidade padrão a ser adotada, mediante a utilização da fórmula do desvio absoluto 4 dividido por 2.

$$DA/2 = \sum_{d=1}^9 \frac{|po - pe|}{2} \quad e \quad DA/2 = \sum_{d=0}^9 \frac{|po - pe|}{2} \quad (7)$$

Este teste, além de possuir as vantagens das suas outras variantes (DA e MAD), identifica pelo seu resultado diretamente a proporção das ocorrências com desvios positivos no total da amostra analisada.

3.1.4 Discrepância Relativa

A discrepância é a diferença entre dois valores medidos de uma grandeza, tal como a diferença entre os valores obtidos por dois estudantes ou a diferença entre o valor encontrado por um estudante e um recomendado ou tabelado. É incorreto usar-se os termos erro ou desvio para representar tais diferenças. Silva (2009) diz que “discrepâncias relativas de probabilidade são definidas como diferenças entre probabilidades exatas (calculadas numericamente) e as respectivas probabilidades assintóticas divididas pelas probabilidades assintóticas”.

Em outras palavras, a discrepância relativa é uma relação percentual entre duas medidas, observadas e/ou esperadas. Adaptado para o contexto contabilométrico, a discrepância relativa seria definida como a diferença entre as probabilidades observada (PO) e a probabilidade esperada (PE) divididas pela probabilidade esperada. Segundo a fórmula:

$$\Delta_o = \frac{po - pe}{pe} 100 \quad ou \quad \frac{PO - PE}{PE} 100 \quad (8)$$

Onde po e pe representam a frequência relativa observada para o dígito e o percentual previsto pela NB-Lei para a posição e dígito analisado, tal como utilizado no Z-Teste.

3.1.5 Teste de Kolmogorov-Smirnov (KS-discreto)

O K-S é bastante similar aos outros testes de proporção, no entanto com algumas diferenças sutis que o torna mais desejável na análise de conformidade com a NB-Lei. Primeiro proposto por Pettitt e Stephens (1977), a estatística é apenas uma modificação do teste proposto por Kolmogorov (1933) e Smirnov (1939) para se trabalhar com células finitas de probabilidade ao invés do teste clássico desenvolvido para uma distribuição contínua.

Similar a outros testes advindos da estatística, assume-se uma formação aleatória dos dados estudados. Como os dados de natureza contábil, principalmente os da despesa pública por serem regidos por Leis, portarias e demais atos normativos. Para uma verdadeira comprovação da independência dos dados, faz-se necessário um estudo aprofundado da temática de porte e contextualização não vistos na literatura estudada. Considerando ainda que dados em meio digital quando aportados por sistemas de informações são capazes de analisar volumes de dados além da capacidade de técnicas mais tradicionais, uma solução trivial seria o abandono de métodos de inferência em prol de outras técnicas capazes de avaliar todo o universo dos dados.

Assim como nos testes Z e χ^2 , cada célula de probabilidade é referente à uma probabilidade de um dígito em uma dada posição. Segundo pesquisa elaborada por Steele e Chaseling (2006), o K-S possui um poder elevado em certos tipos de distribuições, chamamos atenção para distribuições de tendência decrescente. Em tais distribuições as células possuem sempre valores decrescentes fazendo com que a primeira célula sempre possua a maior divergência com uma distribuição do tipo uniforme nula e também causando que o maior gradiente esteja presente na segunda célula. É fácil perceber que a NB-Lei se enquadra nesse tipo de distribuição e vai se aproximando da uniforme nula na medida que avançamos para dígitos menos significativos. No mesmo trabalho pode-se encontrar uma tabela com valores críticos para diversas distribuições. Para a NB-Lei, tanto para primeiro como demais dígitos o valor crítico indicado é de 0.05 (para um $\alpha = 5\%$).

A estatística do K-S é dada por

$$S = \max_{1 \leq i \leq k} |Z_i|, \quad (9)$$

$$Z_i = \sum_{j=1}^i (O_j - E_j), \quad (10)$$

para cada célula i , onde O_j indica a probabilidade observada na j -ésima célula e E_j a esperada.

3.2 Teste de Invariância

Dentre as características da NB-Lei, a principal é a invariância escalar da base. Sendo assim os testes de invariância diferenciam-se por avaliarem uma característica até então comprovadamente exclusiva deste tipo de distribuição, (HILL, 1995).

Pinkham (1961) estabeleceu um importante marco da NB-Lei ao demonstrar que só esta distribuição atende ao teorema da invariância de escala. Esta sua característica única determina que se um conjunto de números segue a NB-Lei então a multiplicação de seus elementos por uma constante diferente de zero produzirá um novo conjunto de números que também seguirá a NB-Lei.

Como consequência do teorema da invariância escalar, tem-se que os dados de uma distribuição NB-Lei manterão sua característica independentemente da unidade de medida escolhida para a sua representação. Ex: Se um conjunto de dados expressos em reais (R\$) atende à NB-Lei, tais dados manterão sua característica quando expressos em qualquer outra moeda após o seu ajuste de cotação. Hill (1995), após significativas contribuições no campo da teoria das probabilidades desenvolvidas por Pinkham (1961), Feller (1968) e Raimi (1969), comprovou que a propriedade da invariância escalar implicava também na propriedade de invariância de base, ou seja, manteria sua validade para qualquer base inteira de evidenciação dos dados, e não apenas para a base 10.

3.2.1 Desvio na Média da Convolução - DMC

Uma forma direta de se testar a invariância seria multiplicar os valores por uma constante k consecutivamente até que pelo menos $k^i \approx 10, k, i \in \mathbb{R}^+$, onde \mathbb{R}^+ representa o conjunto dos números reais positivos. O ideal é que se escolha um k pequeno, preferencialmente de forma que $1 < k < 2$ para evitar que os números divirjam significativamente se sua ordem de magnitude inicial. O critério de parada garante que ao final das consecutivas multiplicações os dígitos retornem ao valor inicial pois, foram escalados por um múltiplo da base.

No entanto multiplicar a distribuição por si não mensura a conformidade com a NB-Lei, para isto é necessário escolher um dígito em uma dada posição e ver como sua frequência varia na medida que a distribuição vai sendo escalada. Mensurar apenas um dígito é suficiente pois, um desvio no dígito em questão obrigatoriamente afetará os outros dígitos em outras posições nas subsequentes multiplicações fazendo com que assim apenas a NB-Lei seja escalar invariante.

Para simplificar a operação de mensurar as partes da pdf cujos valores iniciam com dígito '1' é indicado que se transforme a pdf para escala logarítmica de forma que as ordens de grandeza tenham mesma largura. Desta forma, podemos amostrar a parte desejada com um filtro de período igual a uma ordem de grandeza, onde a proporção equivalente a $\log_{10}(2)$ terá valor de 1 e o restante de valor 0. A operação de mensurar um determinado dígito na pdf dos dados é dada por uma integração, e o deslocamento constante desta integral enquanto se multiplica a distribuição é uma convolução. O teste de invariância escalar foi proposto por Smith (1997) sugerindo que esta convolução seja feita no domínio das frequências para se ganhar eficiência computacional, no entanto, o autor trabalha apenas com o caso contínuo e transformar uma pdf que foi estimada de uma distribuição não paramétrica pode ser bastante complicado. No lugar, podemos repetir o teste convoluindo em domínio espacial, otimizando-o através da álgebra linear. Podemos convoluir de forma eficaz construindo o operador da convolução através de uma matriz de Toeplitz. Uma matriz é dita ser Toeplitz se suas diagonais são constantes, ou seja, $a_{ij} = f_{j-i}$ para algum vetor f .

Uma função que obedece a NB-Lei formará uma reta horizontal na frequência do dígito mensurado (por exemplo $\log_{10}(2)$ no caso do dígito '1' para a primeira posição). Já demais funções formarão curvas senoidais em volta da probabilidade esperada de mesmo período que o filtro aplicado (ou seja, se aplicarmos um filtro de dois períodos, o resultado também terá dois períodos). Para determinar a conformidade, basta selecionarmos o ponto que possui maior divergência com a média, sendo assim aquela divergência implica na proporção do dígito escolhido quando multiplicado por alguma constante.

3.3 Teste de Média

Considerando que uma população analisada, composta por N elementos, siga o padrão de distribuição da NB-Lei, então teremos que a média esperada (ME) para os dígitos de uma posição individualmente considerada será obtida mediante o seguinte cálculo:

$$MO = \frac{d_0 \cdot N \cdot pe_0 + d_1 \cdot N \cdot pe_1 + d_2 \cdot N \cdot pe_2 + \dots + d_9 \cdot N \cdot pe_9}{N} \quad (11)$$

Onde d é o dígito e pe a proporção esperada para esse dígito. Desconsiderando a parcela nula equivalente ao dígito zero e simplificando o N na fração, teremos:

$$ME = \sum_{d=1}^9 dpe \quad (12)$$

Visto que o tamanho N da população não altera o cálculo da média e a NB-Lei estabelece proporções fixas para a ocorrência dos dígitos, temos que o valor da média esperada (ME) de um conjunto em conformidade com a NB-Lei será constante para cada uma das posições investigadas.

Posch e Kreiner (2005) identificam que a média de uma distribuição tende para $9/\ln(10) \approx 3,9087$ quando as proporções dos seus dígitos tendem à NB-Lei, consideradas todas as posições.

3.3.1 Fator de Distorção – DF

Observando o comportamento da média dos dígitos numa distribuição NB-Lei, Nigrini (1992) propôs o modelo do fator de distorção (DF), sendo este uma forma de quantificar a intensidade e direção dos desvios de uma série de dados em relação à NB-Lei. O modelo consiste basicamente em medir o desvio da porcentagem da média observada da série de dados investigada (MO) em relação à média esperada (ME) mediante aplicação da seguinte equação:

$$DF = \frac{MO - ME}{ME} \quad (13)$$

A aplicação do modelo requer que todos os elementos da série de dados investigada estejam contidos em um mesmo intervalo representativo de uma única grandeza, tal como $[1:10[$; $[10:100[$ ou $[0,1:1[$, garantindo-se desta forma que haja uma uniformidade de peso no cômputo da média independente da grandeza individual associada a cada número. O ajuste à escala, quando necessário a depender do número, deve ser feito movendo-se o ponto decimal de cada número real. Para os números que já se encontram no intervalo desejado não será requerido nenhum ajuste.

Tomando-se o exemplo proposto por Nigrini (1992), que utilizou o intervalo $[10:100[$, temos que os números 12,62; 10; 48,7 e 99,99 não necessitam de ajuste em relação ao intervalo supracitado. Já os números 110.458; 7,43; 0,15 e 100 deverão ser convertidos pela movimentação do ponto decimal para os respectivos números reais 11,0458; 74,3; 15 e 10, promovendo desta forma a sua imersão no intervalo escolhido.

Diniz, Corrar e Slomski (2010), valendo-se do modelo do fator de distorção (DF) desenvolvido por Nigrini (1992), observaram o comportamento dos desvios em 225.421 notas de empenhos emitidas por 40 municípios.

3.4 Testes de Análise Multivariada

Alguns autores optaram por uma análise multivariada através de técnicas de aprendizado estatístico. O primeiro relato aconteceu com Busta e Weinberg (1998) que optaram por usar estatísticas inferenciais e descritivas na determinação de conjuntos como

sendo conformes ou não com a NB-Lei. Além de algumas informações da distribuição testada como média, variância e curtose, os autores também adotaram alguns testes estabelecidos na literatura como o χ^2 como critérios de entrada para uma rede neural. Segundo os autores, a determinação por este método foi melhor sucedida que técnicas aplicadas por outros autores de destaque.

Retomando a linha da análise multivariada, Bhattacharya et al (2010) utilizou uma abordagem combinando redes neurais com algoritmos genéticos para classificação de dados como NB. Adotando uma metodologia similar a Busta e Weinberg (1998), os autores agregaram novos testes para a análise multivariada, dando destaque para o K-S e para a entropia máxima de Shannon como melhores critérios para classificar corretamente uma distribuição não NB.

4 Proceder metodológico

Este trabalho pode ser classificado como uma pesquisa teórico-empírica. Teórico, porque se utiliza de uma revisão da literatura para identificar pontos relevantes da teoria, e empírica por executar testes objetivando constatar a realidade que se apresenta nas despesas objeto de análises.

O estudo exploratório pode ser definido como sendo uma das principais formas de construção do conhecimento que incorpora características inéditas, permitindo ao investigador aumentar sua experiência em torno de um determinado problema (RAUPP; BEUREN, 2008).

A respeito da pesquisa quantitativa, Raupp e Beuren (2008), esclarecem que ela utiliza instrumentos estatísticos para analisar os dados. Enquanto a análise qualitativa, segundo Denzin e Lincoln (1994), corresponde a um conjunto de operações necessárias para a sistematização e para a formação coerente de um processo de coleta, armazenagem e recuperação de dados. Contudo, é descabido o entendimento que possa haver pesquisa exclusivamente qualitativa ou quantitativa. Segundo Martins e Theóphilo (2009), a pesquisa científica se reveste de ambos.

Sendo assim, a abordagem científica deste trabalho teve nas Ciências Matemáticas e nas Ciências Contábeis a base para a sua realização, em uma pesquisa estrategicamente estruturada na análise qualitativa /quantitativa /qualitativa aplicada na auditoria.

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos junto aos portais oficiais de dois Estados da região nordeste, disponibilizados na Internet. Foi selecionada uma amostra determinística composta por 60 Unidades Gestoras (UG's), 30 para cada Estado, dentre as que possuíam o maior volume de gasto e um quantitativo mínimo de 800 empenhos emitidos. Para

a análise foram obtidos todos os empenhos não nulos emitidos no exercício de 2010 pelas UG's, 210.899 ao todo, considerados pelos seus saldos (empenho + reforço – anulação), assegurando-se desta forma que todas as observações tivessem um primeiro dígito não nulo. A amostra selecionada representou 61,72% do total das despesas empenhadas pelos estados analisados.

Os testes foram aplicados considerando os valores dos dígitos extraídos da primeira e segunda posição de cada empenho, agrupando-os, separadamente, a um mesmo nível de observações usando o software Microsoft Excel versão 2007. A tabela 1 apresenta a esquematização dos testes aplicados nesse estudo, com seus respectivos tipo, característica, posição, dígito, hipóteses e valor crítico.

Tabela 1

Esquematização dos testes aplicados a NB-Lei na auditoria

Teste	Ti	Caract	P	D	Hipóteses ^a	Valo
KS	Gl	Propor	1	T	H _{A0} e H _{A1}	5%
DM	Gl	Invariâ	T	T	H _{B0} e H _{B1}	-
DF	Gl	Média	T	T	H _{C0} e H _{C1}	5%
χ^2 -	Gl	Propor	1	T	H _{D0} e H _{D1}	15,5
DA/	Gl	Propor	1	T	H _{E0} e H _{E1}	5%
Δ_o	L	Propor	1	T	H _{F0} e H _{F1}	5%
Z-	L	Propor	1	T	H _{G0} e H _{G1}	1,96

Nota. Fonte: Elaborado pelos autores, 2012

^a As hipóteses nulas (final em 0) indicam uma diferença não significativa e as hipóteses um (final em 1) assinalam uma diferença significativa.

5 Análise dos resultados

Foi feito um estudo de correlação entre as métricas avaliadas neste trabalho. O resultado das correlações pode ser visto na tabela 2. O fator de correlação utilizado é dado pela expressão (14). Tal fator é importante, pois determina o comportamento de uma variável em relação à outra, ou seja, dependência linear.

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad 14)$$

onde $\text{cov}(X, Y)$ é a covariância de X com Y . Como a covariância é equivalente, $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$, o fator de correlação também o é equivalente.

A gama de valores possíveis varia no intervalo entre [1,-1] onde 1 indica total relacionamento entre as duas e 0 nenhuma, já valores negativos indicam um comportamento inversamente proporcional ao valor positivo. Por exemplo, se X e Y possuem -1 de correlação então Y decresce a medida que X aumenta e vice-versa. Considera-se um valor absoluto maior que 0.9 como havendo alta correlação e abaixo de 0.3 como sendo baixa correlação.

Tabela 2

Correlacionamento dos testes aplicados a NB-Lei na auditoria

Correlação entre resultados dos testes aplicados nas 60				
K-	K-	K-	K-S	χ^2
0.1	0.3	0.7	0.90	0.81
DF	DF	DF	DM	DM
0.0	0.0	0.1	0.12	0.35

Nota. Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

Dos testes avaliados, os únicos a se correlacionarem de forma desejada (mais que 0.9) foram o K-S com o DA/2. De uma forma geral esses testes tiveram uma correlação boa com os outros testes, principalmente o χ^2 . O DF apresentou os piores resultados dentre os testes estudados, possuindo, no melhor caso, correlação de 0.16 com K-S e 0.12 com DA/2; ambas consideradas insatisfatórias. Já o DMC obteve resultados medíocres, porém altos o suficiente para não serem considerados de baixa correlação (com exceção do DF). Como os testes visam mensurar a mesma informação, conformidade de uma posição com a NB-Lei, o destaque vai para o DA/2 que compartilhou a maior correlação com o K-S e em média teve a maior correlação com os outros testes (~ 0.42 contra ~ 0.40 do K-S) e no entanto a diferença foi desprezível o suficiente para que qualquer um possa ser aplicado sem prejudicar a capacidade da análise de conformidade. O DF precisa ser avaliado melhor, pois notoriamente está mensurando algum fenômeno distinto das outras métricas que não o desejado na metodologia deste trabalho.

A tabela 3 toma, por exemplo, os resultados obtidos com a aplicação dos sete testes propostos, vide tabela 1, aos dados da UG11, que obteve o melhor desempenho entre as 60 UG's analisadas. Um fato que merece destaque é o efeito compensador dos maiores desvios gerados, dígitos 4 (14,15%) e 5 (-12,21%), bem como o seu efeito na média da distribuição e, conseqüentemente, sobre o teste DF. Nos testes globais vê-se de imediato a rejeição isolada de H_{D0} no χ^2 -Teste, enquanto todos os demais testes aceitaram suas hipóteses nulas (H_{E0}). Este fato pode ser explicado pelo maior rigor que este teste assume quando o tamanho da amostra aumenta, sendo 3.714 neste caso. Deve-se frisar também a proximidade do resultado do teste (15,63) com o seu valor crítico (15,50), indicando uma quase aceitação da conformidade.

Tabela 3

Unidade Gestora com o melhor desempenho nos testes

Resultado das Análises da UG11 do Estado E1 - Z-Teste, χ^2 , Δo , DA/2, K-S, DF e DMC												
Dígito	Freq. Obs.	Freq. Esp.	Prop. Obs.	Prob. Lei	Z-Teste	χ^2	Δo	DA/2	K-S	DF	DMC	
1	1.131	1.118	0,3045	0,3010	✓ 0,46	0,15	✓ 1,16%	0,35%	-	-	-	
2	628	654	0,1691	0,1761	✓ -1,12	1,03	✓ -3,98%	0,70%	-	-	-	
3	480	464	0,1292	0,1249	✓ 0,79	0,55	✓ 3,44%	0,43%	-	-	-	
4	309	360	0,0832	0,0969	✗ -2,82	7,20	✗ -14,15%	1,37%	-	-	-	
5	330	294	0,0889	0,0792	✗ 2,18	4,39	✗ 12,21%	0,97%	-	-	-	
6	255	249	0,0687	0,0669	✓ 0,42	0,16	✓ 2,56%	0,17%	-	-	-	
7	228	215	0,0614	0,0580	✓ 0,89	0,74	✗ 5,86%	0,34%	-	-	-	
8	197	190	0,0530	0,0512	✓ 0,52	0,26	✓ 3,69%	0,19%	-	-	-	
9	156	170	0,0420	0,0458	✓ -1,09	1,14	✗ -8,20%	0,38%	-	-	-	
	3.714	3.714	1,0000	1,0000		✗ 15,63		✓ 2,45%	✓ 0,01292	✓ -0,08%	1,07E-01	

Nota. Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

O gráfico 1 demonstra de forma visual as proporções de ocorrências observadas para os dígitos da primeira posição, bem como as probabilidades esperadas e o intervalo de confiança para a proporção em relação ao Z-Teste.

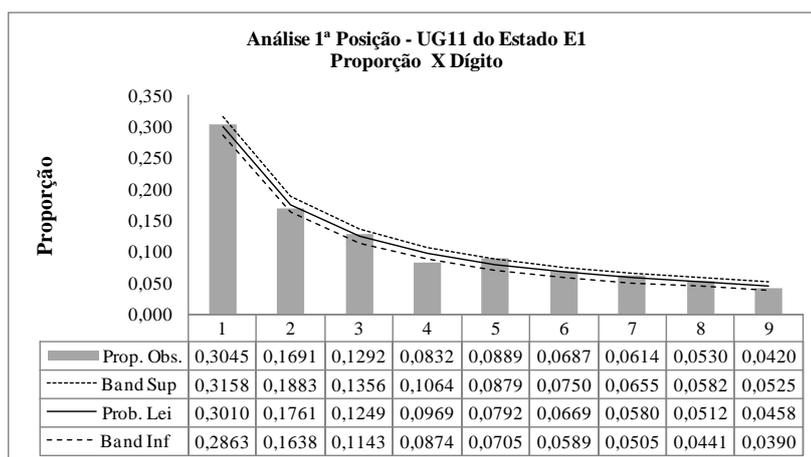


Gráfico 1. Distribuição de ocorrências do primeiro dígito – UG11

Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

O gráfico 2 retrata a mesma aplicação, sendo para a análise conjunta das duas posições, com os dígitos variando de 10 a 99. Em ambos gráficos, com pequenas exceções, fica demonstrada de uma forma visual a aparente conformidade da distribuição.

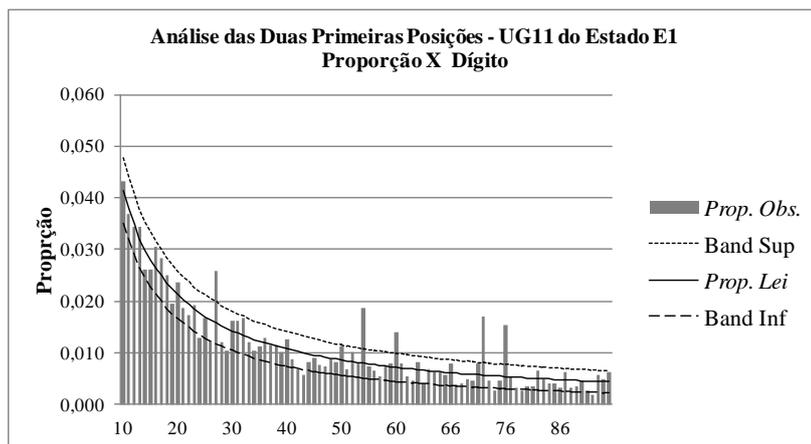


Gráfico 2. Distribuição de ocorrências conjuntas para os dois primeiros dígitos – UG11

Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

Na tabela 4 estão os resultados com a UG27, sendo esta considerada com o pior desempenho nos testes. Os resultados locais evidenciam uma forte rejeição de conformidade para 8 dígitos, apenas o dígito 3 teve aceita a sua hipótese nula H_{E0} . O elevado desvio no dígito 4, 698,62% conforme Δ_0 , foi causado pela emissão de 1.278 empenhos de idêntico valor (R\$ 4.000,00), representando estes 76% do total de empenhos emitidos 1.681. Vê-se no caso a necessidade de uma análise mais aprofundada, com acesso aos instrumentos normativos e documentos comprobatórios destas despesas, discernindo desta forma se os desvios observados são causados por influência de viés normativo ou se de fato retratam erros/fraudes. Resta evidente *in casu* que os alertas de desvios positivos devem ser priorizados em relação aos negativos, otimizando-se desta forma as chances de identificação dos elementos não conformes. Os resultados obtidos nos testes globais corroboram o bom desempenho do K-S sobre os outros testes, bem como torna evidente a fragilidade da análise pelo modelo do DF, que não sinalizou a clara desconformidade da distribuição.

Tabela 4

Unidade Gestora com o pior desempenho nos testes

Resultado das Análises da UG27 do Estado E1 - Z-Teste, χ^2 , Δo , DA/2, K-S, DF e DMC												
Dígito	Frequência	Freq. Esp.	Prop. Obs.	Prob. Lei	Z-Teste	χ^2	Δo	DA/2	K-S	DF	DMC	
1	63	506	0,0375	0,3010	✗ -23,56	387,87	✗ -87,55%	26,36%	-	-	-	
2	31	296	0,0184	0,1761	✗ -16,97	237,26	✗ -89,53%	15,76%	-	-	-	
3	214	210	0,1273	0,1249	✓ 0,29	0,08	✓ 1,89%	0,24%	-	-	-	
4	1.301	163	0,7739	0,0969	✗ 93,83	7950,97	✗ 698,62%	67,70%	-	-	-	
5	15	133	0,0089	0,0792	✗ -10,67	104,79	✗ -88,73%	7,03%	-	-	-	
6	23	113	0,0137	0,0669	✗ -8,74	71,24	✗ -79,56%	5,33%	-	-	-	
7	17	97	0,0101	0,0580	✗ -8,40	66,45	✗ -82,56%	4,79%	-	-	-	
8	9	86	0,0054	0,0512	✗ -8,52	68,93	✗ -89,53%	4,58%	-	-	-	
9	8	77	0,0048	0,0458	✗ -8,04	61,75	✗ -89,60%	4,10%	-	-	-	
	1.681	1.681	1,0000	1,0000		✗ 8949,34		✗ 67,94%	✗ 0,42120	✓ -0,40%	2,01E-01	

Nota. Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

Resta evidente no gráfico 3 a desconformidade dos dados com a NB-Lei. Por outro lado, o excesso de ocorrência no dígito 4 tornou a média da distribuição analisada muito próxima à média da NB-Lei $\approx 3,9087$.

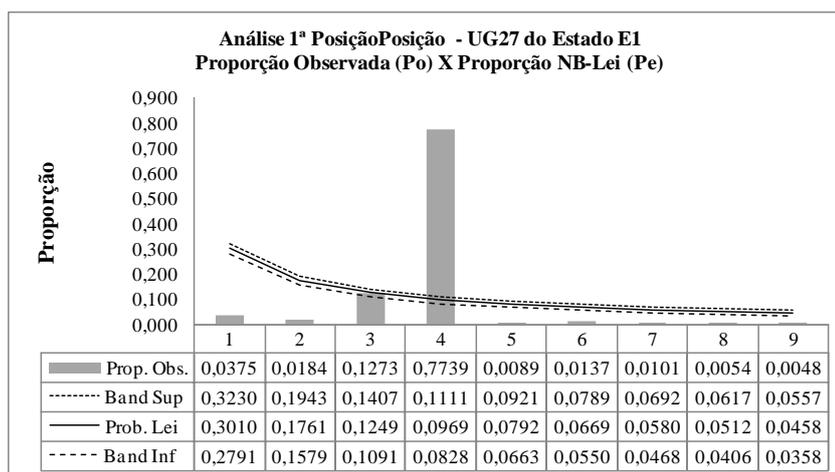


Gráfico 3. Distribuição de ocorrências do primeiro dígito – UG27

Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

O gráfico 4 torna mais evidente o excesso de observações iniciadas pelos dígitos 40 e 30, sendo estes os que mais contribuíram para a desconformidade do conjunto de dados.

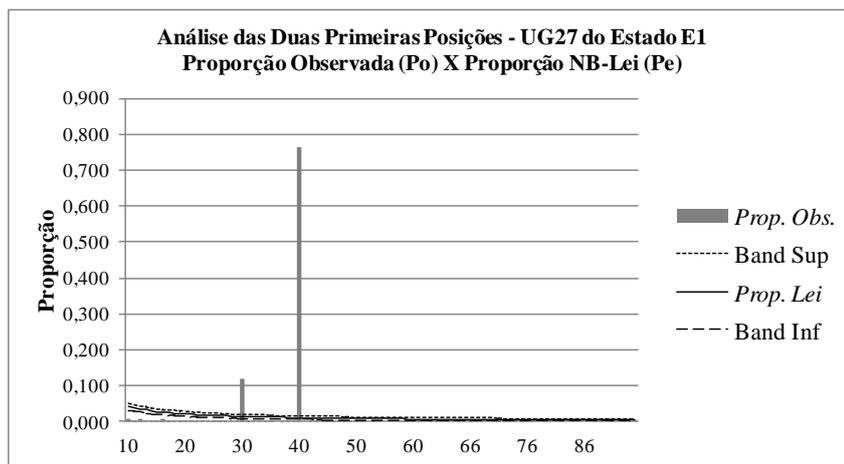


Gráfico 4. Distribuição de ocorrências conjuntas para os dois primeiros dígitos – UG11

Fonte: Elaborado pelos autores, 2012.

6 Considerações finais

Este trabalho analisou os métodos contabilométricos para determinação de conformidade com a NB-Lei aplicados à auditoria contábil. Foram analisados os seguintes testes de conformidade com a NB-Lei: Z-Teste, χ^2 , fator de distorção – DF, discrepância relativa – Δ_o , semi-desvio absoluto – DA/2, teste de invariância escalar – DMC, e o teste de conformidade estatística de Kolmogorov-Smirnov discreto – K-S. Dentre os testes avaliados é importante perceber que alguns conseguem avaliar desvios locais (nos dígitos dentro uma posição: Z-Teste, Δ_o e DA/2), enquanto outros são globais (testando uma ou mais posição de forma integral: K-S e χ^2). Os únicos testes capazes de avaliar toda a distribuição de forma íntegra são o DMC que testa a invariância escalar e o DF que testa a média de todo o universo de dados.

Dentre os testes locais, destacamos certos problemas de rejeição para alguns dígitos devido a forma que cada teste é calculado. A estatística do Z privilegia dígitos maiores aceitando que estes podem possuir desvios mais significativos que os dígitos menores sem rejeitar a hipótese nula em favor da alternativa. O teste de Δ_o parece apresentar um comportamento oposto, sendo mais rigoroso com dígitos maiores. Dígitos mais altos (exemplo do 9) possuem um intervalo muito pequeno do todo (menos que 5%) e portanto a adição de novos elementos potencialmente prejudica mais tais dígitos. Ao adicionarmos 1 elemento numa distribuição contendo 99, esse novo elemento representa 1% do todo e mais de 20% do dígito 9. Já o DA/2 aparenta ser bastante balanceado, não privilegiando qualquer dígito independente de sua probabilidade esperada.

Nos testes globais, tanto o DA/2 quanto o K-S possuíram algum destaque. O DA/2 se sobressaiu ao se correlacionar melhor com os outros e ser de fácil obtenção, a simples soma dos desvios dividido por 2. O χ^2 possui alguns problemas já identificados na literatura, notoriamente a explosão da estatística calculada quando o tamanho da amostra é suficientemente grande. Um reflexo disto é a rejeição da UG11 do estado E1 que apresentou uma distribuição conforme com a NB-Lei.

Nos testes que visam classificar a distribuição como um todo, o DMC apresentou os melhores resultados. Apesar de não haver demonstrado um comportamento esperado de uma metodologia eficaz, ele se mostrou muito superior ao outro teste, DF. O DF possui uma característica limitante, a média é condição necessária, porém não suficiente para enquadramento com a NB-Lei. Se distribuições NB-Lei possuem a média próxima do esperado, distribuições não conformes também podem possuir. O exemplo trivial deste fato é uma distribuição composta por um único valor repetido igual à média. O caso da UG27 do estado E1 é um caso prático deste cenário. Isto pode levar o auditor a considerar uma UG não conforme erroneamente como conforme, cenário bastante indesejado.

Para obtenção de resultados mais concretos é preciso focar em aspectos que são únicos de distribuições conformes com a NB-Lei como invariância escalar. Apesar dos testes de proporção terem se mostrado bastante eficazes, é preciso adaptá-los para que possam enxergar as probabilidades condicionadas. Os testes de média por si claramente não se mostram viáveis mesmo em casos práticos. Os autores deste trabalho recomendam como trabalhos futuros o desenvolvimento de novas metodologias para assessorar as equipes de auditoria na detecção de desvios baseadas na NB-Lei.

Ante as considerações expostas, e, considerando ainda, que a principal contribuição da NB-Lei aplicada à auditoria contábil consiste em subsidiar a seleção da amostra a ser auditada, os autores determinam que o parecer metodológico aplicado na literatura estudada com maiores chances de obtenção de resultados neste contexto foi a aplicação do DMC na distribuição como um todo, seguido do semi-desvio absoluto aplicado de forma global às primeiras posições e finalmente a discrepância relativa como teste local direcionado aos dígitos das posições analisadas que apresentaram piores resultados no teste anterior.

REFERÊNCIAS

- BENFORD, F. The law of anomalous numbers. **Proceedings of the American Philosophical Society** 78, 551-572. 1938.
- BHATTACHARYA, S.; XU, D.; KUMAR, K. An ANN-based auditor decision support system using Benford's law. **Decision Support Systems**, v. 50, n. 3, p. 576-584, 2010.
- BUSTA, B.; WEINBERG, R. Using Benford's law and neural networks as a review procedure. **Managerial Auditing Journal**, v. 13, n. 6, p. 356-366, 1998.
- CARSLAW, C. A. P. N. Anomalies in Income Numbers: Evidence of Goal Oriented Behavior. **The Accounting Review**, Abril/1988, Vol. LXIII, No. 2.
- COSTA, J. I. F.; SANTOS, J.; TRAVASSOS, S. K. M.. Análise de conformidade nos gastos públicos dos entes federativos: estudo de caso de uma aplicação da Lei de newcomb-benford para o primeiro e segundo dígito em dois estados brasileiros. In: 11º CONGRESSO USP DE CONTROLADORIA E CONTABILIDADE, 11, 2011. São Paulo. **Anais...** São Paulo: FEA/USP, 2011.
- DENZIN, N. K., LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. Sage Publications: London, 1994.
- DINIZ J. A.; CORRAR L. J.; SLOMSKI V. Análise digital: uma abordagem cognitiva na detecção de não conformidade em prestações de contas municipais. In: 10 CONGRESSO USP DE CONTROLADORIA E CONTABILIDADE, 10, 2010. São Paulo. **Anais...** São Paulo: FEA/USP, 2010.
- HILL, T.P. Base-Invariance implies Benford's Law. **Proceedings of the American Mathematical Society**, 13, 887-895, 1995.
- _____. A statistical derivation of the significant-digit law. **Statistical Science** (4), 354- 363, 1996.
- _____. The First-Digit Phenomenon. **American Scientist** 86 (4), 358-363, 1998.
- IUDÍCIBUS, S. Existirá a Contabilometria? **Revista Brasileira de Contabilidade**. Brasília, nº 41, p. 44-46, 1982.
- KRAKAR, Z.; ŽGELA, M. Application of Benford 's Law in Information Systems Auditing. **Journal of Information and Organizational Sciences**, Vol.33 No.1 July 2009.
- KOLMOGOROV, A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, **Giornale dell' Istituto degli Attuari** Vol. 4, p. 83-91, 1933.
- MARTINS,G. A. ;THEÓPHILO, C. R. **Metodologia da investigação científica para as ciências sociais aplicadas**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- NIGRINI, M.J. I've got your number – Online Publications. **Journal of Accountancy**, May, 1999.

_____. LINDA, J.M. The use of Benford's Law as an aid in analytical procedures auditing: **Journal of Practice and Theory** 16, 52-67, 1997.

_____. MILLER, S. J. Data Diagnostics Using Second-Order Tests of Benford's Law. Auditing: **A Journal of Practice & Theory** 28(2), 305-324, 2009.

_____. **The detection of income tax evasion through an analysis of digital distributions**, PhD. Dissertation, University of Cincinnati. 1992.

_____. MITTERMAIER, L. J. The use of Benford's law as an aid in analytical procedures. Auditing: **A journal of practice & theory**. Vol. 16, nº2, p. 52-67. 1997.

PETTITT, A. N.; STEPHENS, M. A. The Kolmogorov–Smirnov goodness-of-fit statistic with discrete and grouped data. **Technometrics** Vol. 19, p. 205–210, 1977.

PINKHAM, R.S. On the Distribution of First Significant Digits. **Anais da Mathematical Statistics**, 32, 1223-1230, 1961.

POSCH, P. N. A Survey on Sequences and Distribution Functions satisfying the First-Digit-Law. **Journal of Statistics & Management Systems** 11(1), 1-19, 2008.

_____. KREINER, W. A. **A General Approach to Digital Analysis exemplified by Stock Market Indices**, 2005. Disponível em:
<http://www.posch.org/paper/posch_stockmarket.pdf> Acesso em: 01 fev. 2012.

RAIMI, R. The Peculiar Distribution of First Significant Digits. **Scientific American**, 221 (6), 109-120, 1969.

RAUPP, F. M.; BEUREN, I. M.. Metodologia da Pesquisa Aplicável às Ciências Sociais. In: BEUREN, I. M. (Org.) **Elaborar Trabalhos Monográficos em Contabilidade**: teoria e prática. 3 ed. São Paulo. Atlas, 2008.

SILVA, W. B.. **Inferência em regressões lineares estocásticas**: uma avaliação numérica. 83 p. 2009. Dissertação (Mestrado em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Recife: UFPE, 2009

SMITH, S. W. Explaining Benford's Law (Chapter 34). **The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing**. San Diego: California Technical Publishing, 1997. p. 701-722.

SMIRNOV, N. V. Estimate of deviation between empirical distributions, **Bull. Moscow Univ.** Vol. 2, p. 3-16, 1939.

STEELE, M.; CHASELING, J. Powers of discrete goodness-of-fit test statistics for a uniform null against a selection of alternative distributions, **Comm. Statist.** Vol. 35, p. 1067-1075, 2006.

THOMAS, J. K. Unusual patterns in reported earnings. **The Accounting Review**, 64 : 773-787. October 1989.

VASARHELYI, M. A.; HALPER, F.B. The continuous audit of online systems. *Auditing: A Journal of Practice and Theory*, v. 10 n. 1, 1991, p. 110-125.