Perspectiva Filosófica, Vol. 2, nº 40, 2013
ISSN: 23579986

O conceito de número

Ernst Cassirer[1]

Resumo

"O Conceito de Número", de Ernst Cassirer, é o Capítulo 2 da sua primeira obra sistemática, o "SubstanzbegriffundFunktionsbegriff:*Untersuchungenüber die Grundfragen der Erkenntniskritik"*, publicada originalmente em alemão em 1910. A tradução para o inglês, em 1953, por *Marie Collins Swabey*e *William Curtis Swabey*, sob o título "Substance and Functionand Einstein's Theory of Relativity", apesar de sua importância pelo papel difusor da obra, perde em seu título o essencial da obra: a oposição entre "conceito-substancia" e "conceito-função", ou melhor, entre "conceito-substancial" e "conceito-funcional". Cassirer possui ao lado de uma "teoria das formas simbólicas" uma "teoria da cultura". Essas teorias são "teorias de formação conceitual" e são devedoras dos diversos estudos de caso desenvolvidos por Cassirer no "SubstanzbegriffundFunktionsbegriff". O capítulo 2, agora traduzido, é uma leitura do desenvolvimento histórico do conceito de número sob a ótica de uma teoria geral do conceito que ele apresenta no Capítulo 1 do livro, "ZurTheorie der Begriffsbildung" (Sobre a teoria de formação conceitual).

Palavras-chave: Cassirer; Pensamento substancial; Pensamento funcional; Número

Abstract

"The Concept of Number", by Ernst Cassirer, istheChapter 2 ofhisfirstsystematicwork, the "SubstanzbegriffundFunktionsbegriff: *Untersuchungenüber die Grundfragen der Erkenntniskritik", originallypublished in German in 1910. The translation to English, in 1953, by Marie Collins Swabey*and *William Curtis Swabey*, under the title "Substance and Functionand Einstein's Theory of Relativity", despite of its importance for having broadcasted the work, losts in its title the work's essence: the opposition between "concept-substance" and "concept-function", or better, between "substantial-concept" and "functional-concept". Cassirer owns alongside with a "theory of symbolical forms" a "theory of culture". These theories are "theories of conceptual formation" and they are in charge of diverse studies of case developed by Cassirer in "SubstanzbegriffundFunktionsbegriff". The Chapter 2, now translated, is a reading of the historical development of the concept of number under the view of a general theory of the concept that he presents in the Chapter 2 of the book "ZurTheorie der Begriffsbildung" (On the theory of the conceptual formation).

Keywords: Cassirer; Substantial thought; Functional thought; Number

---

[1] Tradução de Bruno Bentzen, Mestre em Filosofia pela UFPE, e Fernando Raul Neto, Professor Associado da UFPE. Esta tradução do Capítulo 2 do livro de Ernst Cassirer "**SubstanzbegriffundFunktionsbegriff: Untersuchungenüber die Grundfrage der Erkenntniskritik**", 1910, originou-se de um curso sobre a teoria da formação de conceitos de Cassirer ministrado pelo segundo tradutor na UFRPE no primeiro semestre de 1992. Aos professores participantes do curso, Maria do Socorro Brasileiro, Elizabete Cabral, Antão Lino e José de Arimatéia os agradecimentos pela colaboração na primeira versão da tradução. Uma introdução geral ao livro será posteriormente publicada pelo segundo tradutor sob o título "**SubstanzbegriffundFunktionsbegriff**" (1910): o livro-laboratório de Ernst Cassirer (1874-1945)".

I

Entre os conceitos fundamentais da ciência pura o conceito de número surge em primeiro lugar, tanto histórica quanto sistematicamente. Nele desenvolve-se pela primeira vez a consciência do significado e do valor da formação de conceitos em geral. A ideia de número parece encerrar todo o poder do conhecimento, toda a possibilidade da determinação lógica do sensível. Se não fosse o número com a sua essência nada nas coisas seria apreensível, tanto nelas próprias, como em suas relações umas com as outras. Essa doutrina pitagórica permaneceu inalterada em seu real significado ao longo de todas as mudanças ocorridas no pensamento filosófico. A pretensão de alcançar a substância das *coisas* no número tem diminuído gradualmente, mas, ao mesmo tempo, aprofunda-se e clarifica-se o entendimento de que no número enraíza-se a substância do conhecimento racional. Mesmo quando nele não mais se vê o núcleo metafísico do objeto, o conceito de número permanece a expressão primeira e fiel do método racional em geral. Nele espelham-se diretamente as diferenças de princípio entre as concepções fundamentais do conhecimento. O ideal geral do conhecimento ganha aqui uma forma mais determinada na qual pela primeira vez e com total clareza esse ideal é enfatizado e delimitado.

As lacunas da dedução sensualista

Dessa forma, é bem compreensível que encontremos logo no limiar da álgebra a mesma resistência típica observada no campo da *lógica*. Se aceitarmos o ponto de vista lógico tradicional, deveremos encontrar certas propriedades fundamentais dos objetos reveladas nos conceitos numéricos. A teoria da "abstração" não dispõe, estritamente falando, de nenhum outro ponto de vista: da mesma forma que os objetos são diferenciados de acordo com o tamanho e a forma, de acordo com o olfato e o paladar, necessariamente, segundo a teoria, eles também carregam consigo uma certa propriedade que neles imprime seu caráter numérico. O conceito de "dois" ou de "três" seria assim abstraído de uma pluralidade de grupos de objetos, do mesmo modo que o conceito de uma certa cor surge da comparação de coisas perceptivamente coloridas. Segue logicamente desse raciocínio que todas as afirmações acerca de números e de relações numéricas são expressões de certas propriedades físicas dos objetos. É no desenvolvimento moderno do empirismo que esta consequência latente surge pela primeira vez com toda clareza. De acordo com J. S. Mill, por exemplo, a proposição2+1 = 3 não representa uma mera definição, uma mera fixação do significado que deve ser associado aos conceitos de dois e de três, mas reporta-se a um fato empírico que a nossa percepção espacial nos oferece sempre da mesma maneira. Sempre fomos capazes, quando víamos três coisas diante de nós em um certo arranjo, - por exemplo, na forma $O^{O}O$ - de separá-las em grupos menores como O e O. Três seixos não produzem a mesma impressão em nossos sentidos quando eles estão dispostos em duas pilhas separadas ou quando estão reunidas em uma única pilha. Portanto, a afirmação de que a percepção que surge no primeiro caso pode ser sempre transformada, por meio de um mero rearranjo espacial de suas partes, na segunda percepção não é de forma alguma uma proposição de *identidade* que nada afirma, mas uma verdade indutiva aprendida em uma experiência anterior e que tem sido desde então continuamente confirmada. Tais verdades constituem o fundamento da ciência dos números. A aparência de *idealidade* que se dá a essa ciência deve assim desaparecer. As proposições da aritmética perdem assim seu antigo caráter de excepcionalidade: elas estão agora no mesmo plano das demais observações que fazemos através de separações e combinações no mundo físico. Pois, como poderiam existir *juízos* significativos e válidos que não fizessem referência aos fatos sensíveis? O conceito de dez, ou nada significa, ou designa uma certa impressão global uniforme que é sempre encontrada em grupos de dez corpos, dez tons ou dez pulsações. E que as diversas impressões assim ganhas dos objetos constituem um *sistema* entre elas mesmas, no qual prevalecem certas relações constantes, é, igualmente, uma proposição que possui apenas uma validade empírica. Uma realidade diferente, um novo ambiente físico, que nos envolvesse, poderia fazer a proposição 2 x 2 = 5 tão familiar e auto-evidente para nós quanto ela agora nos parece ininteligível e absurda.[2]

Os "Fundamentos da Aritmética" de Frege

Com esse primeiro passo no campo dos problemas científicos exatos já podemos perceber claramente o real significado e a amplitude do que parece se constituir apenas de diferenças lógicas formais. Pois, de qualquer forma que se queira interpretar a teoria de Mill para os fundamentos da aritmética elementar, é preciso reconhecer que ela segue com estrita necessidade a sua interpretação geral do conceito. E bem significativo é que a teoria, quando

[2]Cf. Mill, ***A System of Logic***, Livro II, Cap. 6; *An Examination of Sir William Hamiltons Philosophy*, p. 67 ff.

levada adiante, entra em conflito direto com o próprio *Faktum* da aritmética científica. Toda vez que se tentou na matemática moderna analisar e fundamentar esse fato, foi preciso se afastar da ilusão aqui mostrada, e distinguir com toda energia e precisão a estrutura lógica da teoria pura dos números da aritmética de Mill de "seixos e nozes". De fato, se a dedução de Mill estivesse correta, os conceitos aritméticos estariam destituídos daquela *determinação* que constitui seu conteúdo e valor real. A diferença lógica entre os números estaria limitada e restrita pela capacidade de diferenciação psicológica que adquirimos na apreensão de conjuntos de objetos dados. O absurdo dessa consequência pode, todavia, ser facilmente constatado. O *número* 753.684 é determinado e claramente diferenciado daquele que imediatamente lhe precede ou sucede, da mesma maneira que três o é de dois ou quatro; mas quem poderia apontar a "impressão" que diferencia a intuição dos correspondentes grupos concretos um do outro? E da mesma maneira que aqui se perde o conteúdo característico dos conceitos numéricos, por outro lado, eles perdem a amplitude e a liberdade de aplicação que são essenciais a eles. A síntese da contagem só pode ocorrer, de acordo com Mill, onde a combinação e a separação por ela instituída possam ser *efetivamente exequíveis* com objetos físicos, onde as próprias coisas pudessem ser reunidas e separadas em grupos espaciais perceptíveis. As imagens cambiantes que surgem em nós a partir dos grupos diferentes constituem o substrato real e indispensável de todas as afirmações concernentes às relações numéricas. Fora do campo da intuição espacial, no qual exclusivamente são possíveis essas combinações e separações efetivas, o fundamento real dos conceitos numéricos estaria ausente. Porém, na verdade, nós não falamos apenas do número de grãos numa pilha, mas também do número de categorias, do número das leis de Kepler ou do número de fatores energéticos; todos objetos que não podem ser arrumados lado a lado e separados uns dos outros como seixos. "Seria de fato bem estranho", observa Frege em sua drástica e pertinente crítica à doutrina de Mill, "se uma propriedade abstraída de coisas exteriores pudesse ser transferida sem alteração de sentido para experiências, representações e conceitos. Seria precisamente como se alguém quisesse falar de uma experiência maleável, de uma representação azul, de um conceito salgado ou um julgamento pegajoso. É absurdo que aquilo, que por natureza é sensível, pudesse ele próprio se apresentar em conexão com o insensível. Quando vemos uma superfície azul temos uma impressão peculiar que corresponde à palavra azul; e reconhecemos isto novamente quando vemos uma outra superfície azul. Se assumimos que ao olharmos um triângulo existe da mesma forma algo sensível que corresponde à palavra "três", então esse elemento sensível deve também ser encontrado em três conceitos; algo não sensível teria algo sensível como propriedade. Pode-se aceitar que existe uma espécie de impressão sensível correspondente à palavra "triangular", mas desde que tomemos a palavra como um todo. O três que nela ocorre não vemos imediatamente, mas surge associado a uma atividade intelectual que conduz a um juízo que o contém"[3].

O sistema da aritmética

Se os absurdos, inevitavelmente implícitos na interpretação sensualista do número, não surgem claramente nas primeiras deduções, explica-se pelo fato de que essas atividades intelectuais, os processos do *juízo*, também aqui não estarem inteiramente excluídas, mas tacitamente assumidas. De acordo com essa teoria, apenas as primeiras verdades da aritmética e as fórmulas mais elementares são resultados da observação imediata dos fatos físicos, enquanto que o sistema científico da álgebra apoia-se, não no fluxo continuamente renovado dos fatos da percepção, mas na "*generalização*" dos fatos sensoriais originais. Essa concepção, no entanto, inclui novamente todos os enigmas que a teoria prometia resolver. Quando se tenta dar a tal concepção um sentido claro e definido, vê-se que ela implica diretamente uma pluralidade de diferentes *funções intelectuais* que participam na construção do domínio do número. Se é possível estender progressivamente as observações que fazemos com grupos menores de objetos para complexos cada vez maiores, e determinar por analogia as propriedades dos que seguem a partir daquelas dos que lhes antecedem, pressupõe-se que exista alguma forma de *relação* e *dependência* entre os casos comparados que permite deduzir uma a partir da outra. Não teríamos o direito de estender qualquer determinação que nos aparecesse num grupo individual para grupos de maior ou menor número de elementos, se não compreendêssemos todos eles como *similares* por "natureza". Essa similaridade, entretanto, não significa mais que o fato de eles estarem conectados por uma *regra* definida que permite passar de uma variedade a outra pela contínua *aplicação idêntica da mesma relação fundamental*. De fato, sem a hipótese de tal conexão deveríamos estar preparados para a possibilidade de que qualquer unidade, adicionada ou subtraída de um dado grupo, alteraria a característica total do grupo de tal forma que não seria possível tirar nenhuma conclusão do comportamento de um para o de qualquer outro. As novas unidades atuariam então como muitas circunstâncias *físicas* ou forças, que poderiam transformar completamente o todo e alterar as suas características fundamentais. Nenhuma lei de aplicabilidade geral, nenhuma relação contínua

[3] FREGE, ***Die Grundlagen der Arithmetik***. Breslau, 1884, p. 3lf. Sobre o assunto cf., particularmente, p. 9 ff., p. 27 ff.

englobaria mais os termos do domínio do número; pelo contrário, toda proposição aritmética teria de ser verificada para cada número individual, *particularmente* pela observação e percepção. A teoria sensualista só consegue evitar essa consequência por conta de um desvio imperceptível numa outra linha de consideração. A demanda por uma generalização das experiências numéricas primitivas contém, apesar de dissimulada, a própria função de universalidade dos conceitos numéricos, que deveria ter sido posta de lado pela explanação. O caminho para uma construção puramente dedutiva do domínio do número é assim reaberto; para isso basta ver que o *mesmo* procedimento intelectual que se revela como essencial em toda teoria que almeja as formas aritméticas mais complexas, constitui o fundamento necessário e suficiente da própria determinação dos elementos. Essa consequência, que a teoria sensualista finalmente admite contra sua vontade, oferece uma primeira visão de uma dedução metódica unificada, deduzindo tanto os fundamentos como a superestrutura a partir de um princípio comum.

O número e a "representação"

No entanto, parece haver uma outra forma de estabelecer a relação desejada entre proposições numéricas e a existência empírica das coisas. Se abrirmos mão do ponto de vista de que todos os juízos aritméticos dirigem-se diretamente aos objetos *físicos* e de que deles dependem para sua validade, resta ainda uma *outra classe de realidades*, na qual parecemos agora captar o significado verdadeiro original dos conceitos numéricos. Não são coisas externas, mas a própria "consciência", na sua peculiar e irredutível maneira de ser, que é a fonte desses conceitos; o que eles buscam englobar e representar não é um ser material, mas um ser mental. A abrangência e a universalidade dos conceitos numéricos parecem adquirir aqui as suas explicações. Número, como *representação*, como *realidade psíquica*, permanece livre de todas as limitações oriundas de seu entendimento como expressão de existências materiais particulares e de suas relações. Podemos reconhecer agora, em conexão com um problema especial, como aqui se repete a mesma mudança mental que anteriormente havíamos encontrado na teoria geral da lógica. A tentativa de entender o conceito como reprodução direta da realidade externa é abandonada, mas, no lugar dessa realidade externa, surge em nossa mente sua forma fenomênica. O ato de enumeração não fornece as relações das coisas nelas mesmas, mas apenas reproduz o modo pelo qual elas são refletidas na compreensão do nosso Eu.

Contudo, e por mais que essa alteração possa avançar o problema, permanece ainda um elemento que é compartilhado com a dedução sensualista. Novamente a doutrina do número não consegue obter um fundamento lógico *independente*; ela forma agora um apêndice da *psicologia*, assim como anteriormente era um caso especial da física (Cf. acima). Para a psicologia, entretanto, "representação" significa em última análise nada mais que um conteúdo psicológico definido, que aparece no sujeito individual segundo circunstâncias especiais, e que podem ser destruídos novamente da mesma forma. Tal conteúdo é diferente nos diversos indivíduos e, mais ainda, com respeito ao mesmo sujeito, uma vez que ao desaparecer nunca retorna precisamente da mesma forma. Assim, o que é dado aqui é apenas uma *realidade determinada e limitada temporalmente*, não um estado que pode ser retido numa imutável identidade lógica. É o cumprimento dessa última exigência, entretanto, que constitui todo o significado e valor dos conceitos numéricos puros. A proposição $7 + 5 = 12$ não se reporta a nenhuma conexão com experiências de representação, ocorridas no passado ou a ocorrer no futuro nos indivíduos pensantes, mas estabelece uma conexão que, de acordo com uma expressão platônica, liga o sete e o cinco neles mesmos com o doze nele mesmo. O objeto ao qual esse julgamento é dirigido tem, a despeito de sua idealização, uma *determinação* única que nitidamente o diferencia dos conteúdos variáveis de uma representação. A *imagem* psicológica do dois pode, no caso de uma pessoa, vir acompanhada de uma certa representação espacial, e ausente no caso de uma outra, pode agora surgir vividamente, logo depois tenuemente, mas o *significado* aritmético de dois não é afetado por nenhuma dessas diferenças[4]. O que o conceito "é" e significa só pode ser expresso entendendo-o como portador do ponto de partida de certos juízos, como uma totalidade de relações possíveis. Conceitos são idênticos quando podem ser substituídos uns pelos outros em todas as afirmações nas quais aparecem, quando toda relação que vale para um, também pode ser aplicada ao outro. Se usarmos esse critério, a diferenciação total entre o significado *lógico* do conceito de número e a concepção *psicológica* da representação é imediatamente revelada. As relações características que prevalecem na série de números não são pensáveis como propriedades de um dado conteúdo de representação. É sem sentido dizer que uma representação é maior ou menor que uma outra, o dobro ou o triplo, que uma é divisível pela outra, etc. E o postulado de uma *infinidade* de números exclui, igualmente, qualquer concepção desta natureza, pois todo o "ser" de uma representação é exaurido, em sua imediaticidade, em sua ocorrência real. Se os números são realidades na consciência individual, podem apenas ser "dados" em grupos finitos, *i.e.*, compreendidos na consciência como elementos particulares.

---

[4] Cf. FREGE, *op. cit.,* p. 37.

Conteúdos de representação e atos de representação

Todavia, essa crítica, estabelecida na oposição entre os conceitos numéricos puros e o conteúdo psicológico da sua representação, parece não ter captado o campo do ser psíquico em todo seu significado e alcance. Pode ser objetado, com razão, que o que é característico do número não se revela em um conteúdo qualquer da consciência, particular e isolado, justamente porque existe aqui um pressuposto universal que controla e dirige a *origem* e a *formação* de conteúdos em geral. A ação, pela qual delimitamos uma unidade qualquer, e a síntese, pela qual tais unidades são reunidas em novas formas, constituem a única condição sob a qual podemos falar de uma variedade de elementos e de suas conexões. Apenas a *atividade* de diferenciação e conexão, e não qualquer conteúdo particular dela resultante pode ser o desejado correlato psicológico dos conceitos numéricos. Não com *objetos*, sejam eles da realidade interna ou externa, mas com *atos de a percepção*, que a determinação numérica se conecta e para onde retorna em busca de seu sentido real. A "universalidade" intrínseca ao conceito numérico puro pode assim ser entendida e fundamentada em uma nova direção. Mesmo o sensualismo reconhece essa universalidade, mas ele a compreende, de acordo com sua teoria fundamental, como uma marca reificada, que se espalha uniformemente em um grupo de objetos particulares. "Todos os números", escreve Mill, "são números de alguma coisa, e não existe nada como um número abstrato. Mas, embora os números tenham de ser números de alguma coisa, eles podem ser números de qualquer coisa. Portanto, as proposições relativas aos números têm a notável peculiaridade de ser proposições relativas a qualquer coisa, a todos os objetos, a todas as existências de qualquer espécie conhecida de nossa experiência"[5]. Dessa forma a propriedade matemática de enumerabilidade de coisas é averiguada aqui da mesma maneira como qualquer propriedade física: assim como aprendemos, por uma comparação contínua de casos individuais, que todos os corpos são pesados, também, por um método análogo, descobrimos sua determinação numérica. Reconhecemos, entretanto, que a afirmação da universalidade do número, na medida em que ela se sustenta num procedimento desse tipo, é ganha, em verdade, de forma sub-reptícia, pois nada nos assegura que os casos que extrapolam as nossas experiências mostrem as mesmas propriedades obtidas nos casos efetivamente observados e que assim obedeçam às leis aritméticas. Um novo ponto de vista para a fundamentação do número só é alcançado através de uma dedução psicológica mais madura e mais profunda dos conceitos

[5]Mill, ***A System of Logic***, Livro II, Cap. 6, §2l

numéricos a partir dos atos fundamentais de conexão e separação aperceptiva em geral. Nessa acepção o número é chamado universal, não porque está *contido* como uma propriedade física em qualquer indivíduo, mas porque representa uma *condição constante* de *julgamento* concernente a cada indivíduo como indivíduo. A consciência dessa universalidade não é ganha através de uma p1ura1idade indefinida de casos, mas já é pressuposta na apreensão de cada um deles, pois a associação desses indivíduos em um todo inclusivo só é possível pelo fato de o pensamento reconhecer e fixar-se em uma regra alhures bem-sucedida, em *identidade* conceitual, a despeito de todas as diferenças e peculiaridades da aplicação.

Dessa forma, nesse esforço de dedução que volta dos *conteúdos* de representação acabados para os *atos* pelos quais eles são formados, o problema lógico real do número nem é bem resolvido, como também sofre um retrocesso. Pois, qualquer que seja o valor construtivo que atribuímos às ações puras do pensamento, elas permanecem, no seu sentido puramente psicológico, sempre como *ocorrências* que surgem e desaparecem com o tempo. Assim elas pertencem a um certo fluxo de consciência individual que flui aqui e agora sob as condições particulares do momento. Aqui, entretanto, a questão inicial emerge. Nos juízos aritméticos o que é expresso e estabelecido não é a relação entre realidades temporalmente limitadas, pois o pensamento vai além do campo total dos processos mentais para uma região de objetos ideais para os quais ele atribui uma forma permanente e imutável. É por conta dessa forma fundamental que cada elemento das séries numéricas se conecta com outro de acordo com uma regra sistemática fixa. Mas, uma análise psicológica dos atos de formação de representações não pode desvelar como o um está conectado com o dois, ou o dois com o três e como todo o complexo lógico de proposições da aritmética pura emerge de acordo com essa conexão. A construção e a *fundamentação* objetiva dessa conexão sistemática pertencem a um método totalmente diferente (Cf.abaixo, especialmente Cap.VII). No começo, na verdade, esse método é um simples *pressuposto*, e sua aceitação deve parecer inteiramente problemática. Pois, que formas restam para fundamentar um conceito, se não estamos a considerá-los, nem como cópia de algo interior nem de algo exterior, nem do psíquico e nem do físico? Essa questão, entretanto, que sempre surge, é apenas a expressão de uma certa visão dogmática da natureza e da função do conceito. O sistema dos conceitos aritméticos e das proposições não é para ser avaliado em termos dessa visão. Ao contrário, o ponto de vista lógico-formal encontra um limite e um padrão exatamente nesse sistema, que se desenvolveu gradualmente de seus pressupostos independentes e imanentes.

II

A fundamentação lógica do conceito puro de número (Dedekind)

O desenvolvimento da aritmética científica nas últimas décadas é caracterizado pela demanda crescente de deduzir o conceito de número, em seu pleno significado, a partir de premissas puramente lógicas. A ciência do espaço parece pertencer à intuição, ou talvez mesmo à percepção empírica. Por outro lado, ganha cada vez mais aceitação a ideia de que os números devam ser fundamentados sem nenhum apelo a objetos sensíveis ou a qualquer tipo de dependência de grandezas mensuráveis concretas, mas simplesmente "através de um sistema finito de passos simples de pensamento". Nessa dedução da aritmética a partir da lógica, esta é pressuposta sob uma nova forma. "Se reconstituirmos exatamente", diz Dedekind no início de sua dedução do conceito de número, "o que fazemos quando contamos um grupo ou uma coleção de coisas, somos levados a considerar o poder da mente de relacionar coisas, corresponder uma coisa à outra, uma coisa copiar outra, uma capacidade em geral sem a qual o pensamento é impossível. Sobre esse único, mas absolutamente inevitável, fundamento deve ser erguida toda a ciência do número..."[6]. O ponto de partida aqui parece ser a doutrina lógica tradicional, que parte de uma pluralidade de *coisas*, e do poder da mente de figurá-las. Todavia, olhando o problema com mais profundidade, vê-se claramente que os velhos termos ganham aqui um novo conteúdo e significado. As "coisas", que serão faladas na explanação que segue, não são supostas como existências independentes dadas antes de qualquer relação, mas ganham sua existência completa na medida em que essa última é considerada pelo matemático, primeiramente em e com as relações que acerca delas são construídas. Tais "coisas" são *termos de relações*, e como tais não podem ser "dados" isoladamente, mas apenas em comunhão ideal com cada uma das demais. O procedimento de "figuração" tem também sofrido uma transformação característica. Pois não estamos interessados em produzir uma *cópia* conceitual de impressões exteriores, como fazê-la corresponder a algum aspecto particular, uma vez que figurar não significa nada mais que a *correspondência* intelectual pela qual unimos incidentalmente elementos totalmente diversos numa unidade sistemática. A questão aqui é meramente a unificação dos membros de uma série através de um princípio ordenador e não pela sua concordância em alguma parte constitutiva concreta. Depois de uma certa afirmação inicial ter sido fixada como ponto de partida, todos os elementos posteriores são dados pelo fato de uma relação (*R*) ser

---

[6]DEDEKIND, ***Was sind und was sollen die Zahlen?***2. ed., Braunschweig 1893, p.VIII.

dada, a qual em contínua aplicação gera todos os membros do complexo. Desse modo surgem sistemas e grupos de sistema em divisão conceitual estrita sem que seja necessário que um elemento esteja conectado com outro por qualquer espécie de *semelhança* factual. A "figuração" não produz uma nova coisa, mas uma nova *ordem* necessária entre operações mentais e objetos mentais.

A lógica das relações

Em seu trabalho, *Wassindundwassollen die Zahlen,* Dedekind mostrou como a construção completa da aritmética e a exaustiva exposição do seu conteúdo científico são possíveis partindo desses princípios simples. Não traçaremos em detalhes o desenvolvimento matemático desse pensamento, nos contentaremos meramente em enfatizar sua *tendência* essencial, uma vez que não estamos interessados no conceito de número em si mesmo, mas como um *exemplo* da estrutura de um "conceito funcional" puro. Os pressupostos da dedução do conceito de número são dados na *lógica geral das relações.* Se considerarmos a totalidade das relações suscetíveis de organizar uma série de construções mentais, emergem, em primeiro lugar, certas *determinações formais fundamentais*, que pertencem uniformemente a certas classes de relações e as diferenciam de outras classes com estruturas diferentes. Assim, dada qualquer relação entre dois membros *a* e *b*, que simbolicamente podemos representar pela expressão *a*R*b*,ela pode inicialmente ser de tal forma constituída que também valha para *b* e *a*, isto é, de tal forma que da validade de *a*R*b* siga a de *b*R*a*. Neste caso chamamos a relação de "*simétrica*" e distinguimo-la, por um lado, das relações *não-simétricas*, nas quais a validade de *a*R*b* realmente permite a de *b*R*a*, sem necessariamente implicá-la e, por outro lado, das relações *assimétricas*, nas quais esse tipo de recíproca não é verdadeira, ou seja, nas quais *a*R*b* e *b*R*a* não podem existir simultaneamente. Além disso, uma relação é chamada de *transitiva* quando, valendo para o par de membros *a* e *b*e*b* e *c*, valerá também para o par*a* e *c*. É dita *não-transitiva* quando essa extensão não é necessária e *intransitiva* quando é excluída pela natureza da relação em questão.[7]Trouxemos aqui essas definições, que têm ampla aplicação no cálculo das relações, porque elas dão suporte a uma definição mais exata do que queremos compreender por *ordem* em um dado todo. É, de fato, um

---

7 Russell, a quem se deve essas distinções, ilustra-as com diferentes relações de parentesco; a relação "irmãos" é simétrica e transitiva, a relação "irmão" é não-simétrica e transitiva e a relação "pai" é assimétrica e intransitiva, etc. Sobre isso, e no que se segue, confira RUSSELL, ***The Principles of Mathematics***, I, Cambridge, 1903. Confira também meu ensaio ***Kant und die moderne Mathematik***, Kant Studien XII, p.1 ff.

preconceito ingênuo olharmos a ordem que existe entre os membros de uma variedade como alguma coisa auto evidente, como se ela fosse imediatamente dada pela simples existência dos membros individuais. Na verdade, ela não está ligada aos elementos como tais, mas à relação serial pela qual eles estão conectados. Todo o seu caráter determinado e a peculiaridade específica são derivados dessa relação serial. Investigações mais acuradas mostram que é sempre alguma relação assimétrica e transitiva que imprime uma determinada ordem aos membros de um todo.[8]

O conceito de progressão

Se considerarmos agora uma série que tenha um *primeiro* membro e para a qual uma certa lei de progressão tenha sido estabelecida, de tal modo que cada um de seus membros tenha um sucessor imediato com o qual esteja ligado por uma relação unívoca, assimétrica e transitiva que valha para toda a série, então em tal "progressão" já captamos o tipo fundamental, válido para todos os objetos, que diz respeito à aritmética. Todas as proposições da aritmética, todas as operações que ela define, estão unicamente relacionadas às propriedades gerais de uma progressão. Dessa forma elas nunca são dirigidas diretamente às "coisas", mas às relações de ordem que prevalecem entre os elementos de certos todos sistemáticos. As definições de adição e subtração, multiplicação e divisão, as explicações para o positivo e o negativo, números inteiros e fracionários, podem ser desenvolvidas exclusivamente nessas bases, sem necessidade de retroceder para as relações entre objetos mensuráveis concretos. Segundo essa dedução, o "estoque" inteiro dos números repousa nas relações que eles apresentam *entre eles mesmos*, e não nas suas relações com uma realidade concreta exterior. Eles não necessitam de "substrato" externo algum, mas mantêm-se e sustentam-se mutuamente, na medida em que a *posição de cada um no sistema* é claramente determinada pelos outros. "Quando", diz Dedekind, "na consideração de um sistema simples infinito N, ordenado pela aplicação ϕ, nos abstraímos totalmente das propriedades particulares dos elementos, retendo meramente suas distinções, e nos ocupamos apenas das relações em que eles são colocados entre si pela aplicação ordenadora ϕ, então esses elementos são chamados de *números naturais*, *números ordinais* ou, também, simplesmente *números*, e o elemento fundamental1 é chamado de *número fundamental* da *série numérica* N. No sentido dessa liberação dos elementos de qualquer tipo de conteúdo (abstração), podemos corretamente chamar de número a livre criação da mente humana. As relações ou leis, que [...] em todos os

---

[8] Para um tratamento mais pormenorizado cf. RUSSELL, *op. cit.*, Caps. 24 e 25.

sistemas ordenados simples finitos são sempre as mesmas, quaisquer que sejam os nomes acidentalmente dados aos elementos individuais, formam o objeto primeiro da *ciência do número* ou *aritmétic*"[9]. De um ponto de vista lógico, é de especial interesse que aqui o conceito e o termo "abstração" sejam utilizados em um novo sentido. O ato de abstração não é direcionado ao isolamento de uma característica de uma coisa, mas objetiva trazer para a consciência, independente de todos os casos particulares de aplicação, o significado de uma determinada relação pura nela mesma. A função do "número" é, no seu significado, independente da diversidade factual dos *objetos que são enumerados* e essa diversidade deve então ser descartada, quando estamos interessados meramente em desenvolver o caráter determinante dessa função. Aqui a abstração possui, de fato, o caráter de uma liberação, ela significa *concentração* lógica na conexão relacional como tal, com a rejeição de todas as circunstâncias psicológicas, que se introduzem no curso subjetivo das representações, mas que não formam nenhum aspecto constitutivo real dessa conexão.

O número como número ordinal

Tem sido ocasionalmente objetado à dedução de Dedekind que ela, em princípio, não exibe nenhum *conteúdo que* caracterize o número, que marque sua peculiaridade e o distinga de outros objetos ordenados em série. Desde que, na determinação do seu conceito, somente o momento geral da progressão é retido, tudo o que aqui é dito sobre número é válido para qualquer progressão em geral. Dessa forma, o que é definido é a *forma da série em si*, não a sua *matéria*. Se os números ordinais em geral têm que existir, então eles devem, assim parece ter alguma natureza e propriedade "interiores", eles devem ser distintos de outras entidades por alguma "marca" absoluta, do mesmo modo que pontos são diferentes de instantes, ou tons de cores[10]. Mas essa objeção perde o objetivo real e a essência das caracterizações de Dedekind. O que aqui é dito é exatamente o seguinte: que existe um sistema de objetos ideais cujo conteúdo integral é exaurido em suas relações mútuas. A "essência" dos números está completamente expressa em suas posições.[11]E o conceito de posição deve, antes de tudo, ser entendido em sua

[9]DEDEKIND, *op. cit.*, §6. Sobre o conceito de "aplicação" cf. acima. Sobre a definição de "sistema infinito simples" cf. DEDEKIND, *op.cit.*, §5 e §6.
[10]Cf. RUSSELL, *op. cit.*, §242.
[11]Sobre a dedução de número como "número serial" puro, cf. particularmente a exposição de G F. Lipps (Philosoph. Studien, ed. por Wundt, Vol. III),e também as recentes discussões de Natorp, que

maior universalidade e extensão lógica. A distinção exigida para os elementos apoia-se em condições puramente conceituais, não em condições sensório-intuitivas. A intuição do *tempo* puro sobre a qual Kant baseou o conceito de número é, de fato, desnecessária. Na verdade, pensamos os membros da série numérica como uma sequência ordenada, mas essa sequência nada contém do caráter concreto da sucessão temporal. O três não "segue" o dois como o relâmpago o trovão, pois nenhum deles possui qualquer tipo de realidade temporal, mas, simplesmente, uma constituição lógica ideal. O significado da sequência limita-se ao fato de que o dois entra como uma *premissa* na determinação do três, de modo que o significado de um conceito só pode ser explicado a partir do outro. O menor número é "pressuposto" pelo maior e fora disso não existe qualquer relação física ou psicológica de mais cedo ou mais tarde, mas uma relação pura de dependência conceitual sistemática. O que caracteriza a posição "mais tarde" é a circunstância de que ela resulta da unidade fundamental, através de uma aplicação mais complexa da relação geradora e, consequentemente, toma os elementos que a precede como partes e fases lógicas constitutivas de si própria. Assim, o tempo (se o compreendemos como "forma concreta" do "sentido interno") pressupõe o número, mas, inversamente, o número não pressupõe o tempo. A aritmética pode ser definida como a ciência do tempo puro somente quando removemos do conceito de tempo (como Hamilton faz, por exemplo), qualquer caracterização particular, e simplesmente retemos o momento de "ordem progressiva"[12].

É exatamente nisso que repousa a vantagem metódica da ciência do número: nesse método "o quê" dos elementos de uma determinada conexão progressiva é abandonado, e simplesmente o "como" dessa conexão é levado em conta. Aqui encontramos pela primeira vez um procedimento geral de importância fundamental para a formação total dos conceitos matemáticos. Dado um *sistema de condições*, que pode ser satisfeito com diferentes conteúdos, então podemos manter a forma do sistema como um *invariante* em si mesma, inalterado pelos diferentes conteúdos, e desenvolvermos suas leis dedutivamente. Desse modo produzimos uma nova forma "objetiva", cuja estrutura independe de qualquer arbitrariedade. Seria uma ingenuidade acrítica confundir o *objeto* que surge dessa forma com coisas reais efetivas e sensíveis. Não podemos ler desse objeto, empiricamente, suas "propriedades" e nem precisamos, pois ele está diante de nós

desenvolve essas ideias com especial clareza e profundidade (***Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften**,* LEIPZIG, 1910, Caps. 3 e 4.)

[12]Sobre a definição de álgebra como "ciência do tempo puro ou da ordem em progressão" de William Hamilton e sua relação com o conceito kantiano de tempo, cf. meu ensaio "**Kant und die moderne Mathematik**", *Kant Studien* XII, p.34 f.

em todas as suas determinações, tão logo nos apossemos, em sua pureza, da relação da qual ele se desenvolve.

As teorias de Helmholtz e Kronecker

Por mais fundamental que seja o momento conceitual da ordem, ele ainda não exaure por completo o conteúdo do conceito de número. Um novo aspecto aparece tão logo o número, que até agora foi deduzido como uma *sucessão* puramente lógica de construtos mentais, é compreendido e aplicado como uma expressão de *multiplicidade*. Essa transição do número ordinal puro para o *número cardinal* é feita de forma uniforme nas diversas teorias de números ordinais da aritmética, como a de Dedekind e, em particular, as de Helmholtz e Kronecker. Dado um sistema finito qualquer, podemos relacioná-lo com a totalidade dos números previamente desenvolvida de uma forma clara e definida, fazendo com que cada elemento do sistema corresponda a uma e somente uma posição nessa totalidade. Dessa forma estamos finalmente aptos, seguindo a ordem pré-fixada das posições, a fazer corresponder ao *último* membro do sistema um certo número ordinal *n*. Entretanto, essa correspondência, que conclui o processo, contém em si própria todas as fases anteriores; pois, desde que a progressão de *1* a *n* só pode ser feita de uma maneira, o número que alcançamos reproduz a operação total no seu caráter específico. O número *n*, que foi inicialmente tomado como característica do último elemento, pode agora ser considerado sob um outro ponto de vista, como característica do *sistema global*. Nós o chamamos de *número cardinal* do sistema em questão e dizemos que o sistema consiste de *n* elementos[13]. Evidentemente, é dado como pressuposto que existe um e apenas um cardinal para um dado grupo e que assim a posição que alcançamos ao final do processo é independente da *ordem* pela qual sucessivamente consideramos e destacamos os elementos do grupo. Esse pressuposto, contudo, como Helmholtz particularmente mostrou, pode ser provado rigorosamente a partir das premissas da teoria ordinal, sem necessidade de introduzir um novo postulado, bastando a condição de que a variedade considerada seja um sistema *finito*. As definições das operações fundamentais da aritmética podem também ser transferidas sem dificuldade para a nova espécie de números. Dessa forma a formação da *soma (a + b)* significa, do ponto de vista do número ordinal puro, que começando de *a*, nós "contamos" *b* passos, isto é, que determinamos o lugar na série que alcançamos quando coordenamos os números que segue a *a,* membro por membro, com os

[13]Cf., particularmente, DEDEKIND, ***Was sind und was sollen die Zahlen***, §161, p.54.

elementos da série *1, 2, 3,...b*. Essa explanação continua válida sem modificação quando passamos para a adição de números cardinais. É evidente que da combinação dos elementos de dois grupos, associados aos números cardinais *a* e *b*, resulta novo grupo *C*, cujo número de elementos é dado pelo número *(a + b)* no sentido anteriormente caracterizado. A consideração de "números cardinais" não traz nenhuma propriedade e nenhuma relação, que não tenha sido previamente deduzida a partir da consideração do simples elemento de ordem. A única vantagem é que as fórmulas desenvolvidas pela teoria ordinal ganham uma aplicação mais ampla, uma vez que elas podem, de agora em diante, ser lidas em duas linguagens diferentes[14].

Mesmo que nenhum novo conteúdo *matemático* seja produzido através dessa transição é indubitável que na formação do número cardinal surge uma nova função lógica. Da mesma forma que na teoria do número ordinal os passos individuais como tais são estabelecidos e desenvolvidos em uma sequência definida, aqui também se sente a necessidade de compreender a série não somente nos seus elementos sucessivos, mas como um todo ideal. O momento precedente não é para ser meramente abandonado pelo seu sucessor, mas para ser retido neste último em seu importe lógico global, de modo que o último passo do procedimento contenha nele próprio todos os passos anteriores e a lei de suas conexões mútuas. É exatamente nesta síntese que a sequência dos números ordinais é desenvolvida num sistema unitário fechado em si próprio, no qual nenhum elemento existe meramente para si mesmo, mas, ao contrário, representa a estrutura e o princípio formal da série inteira.

Crítica às tentativas de dedução nominalista

Se essas duas ações lógicas fundamentais forem assumidas na base de toda diferenciação e conexão de números, então nenhum outro pressuposto especial será preciso para determinar o campo das operações da aritmética. Com isto é satisfeita a demanda para uma dedução puramente racional, que evita toda dependência de relações empíricas de objetos físicos. Na verdade, é precisamente esse elemento distintivo que tem sido frequentemente mal-entendido na avaliação da teoria "ordinal" de número. A explanação da teoria, como feita por Helmholtz, por exemplo, leva necessariamente ao entendimento de que, antes de tudo, grupos concretos de objetos são pressupostos como dados e que todo o trabalho do pensamento é exaurido na introdução dos vários símbolos correspondentes a essa diversidade de coisas. Entretanto,

[14]Cf. HELMHOLTZ, ***Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*** (Philosoph. Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, Leipzig, 1887, p.33).

"símbolos" como tais nada mais são que grupos de objetos perceptíveis, que se distinguem uns dos outros visualmente por meio da forma e da posição. Assim, a nossa capacidade de nos abstrairmos das propriedades imediatas das coisas nas afirmações que envolvem relações numéricas justifica-se, porque substituímos a realidade das coisas pelas suas "cópias" sensíveis. O verdadeiro começo da formação do número não seria assim uma abstração dos objetos físicos, mas, pelo contrário, uma solidificação e concentração do seu importe sensório. Cada interpretação desse tipo que diferentes matemáticos parecem ter assumido nas suas exposições da teoria ordinal do número, contradiz a sua real e profunda tendência lógica. Os "símbolos" produzidos deixariam de ser símbolos e perderiam sua função característica, se eles fossem julgados meramente de acordo com o que eles sensorialmente são, e não de acordo com o que eles intelectualmente significam. O que permaneceria, na verdade, seriam apenas certas "imagens", as quais nós poderíamos investigar em sua forma, tamanho, posição e cor., mas nenhum "nominalismo" matemático, por mais extremado que seja, já tentou alguma vez transformar o significado de juízos válidos sobre números em afirmações desse tipo. É apenas a ambiguidade no emprego do conceito de símbolo, apenas a circunstância de que por conceito pode ser entendido, ora a simples existência de um conteúdo sensório, ora o objeto ideal simbolizado por este último, que torna possível essa redução para o esquema nominalista. Leibniz, cujo pensamento dirigiu-se o tempo todo para a ideia de uma "característica universal", apontou com toda a clareza filosófica para esse fato lógico aqui mostrado, opondo-se assim às teorias formalistas de sua época, A "base" da verdade, como ele afirma, não reside nunca nos símbolos, mas nas relações objetivas entre as ideias. Fosse de outra maneira, teríamos de distinguir tantas formas de verdade quantas fossem as maneiras de simbolização. Entre os matemáticos modernos, especialmente Frege tem mostrado, em uma crítica detalhada e penetrante, que a aritmética dos símbolos sobrevive apenas por ser infiel a si própria. No lugar dos símbolos vazios, o significado dos conceitos aritméticos aparece despercebido ao longo do argumento[15].

Na teoria dos números ordinais puros, a interpretação nominalista forma apenas uma capa externa, a qual deve ser retirada para se alcançar o núcleo real do pensamento lógico matemático. Uma vez feito isso, o que retemos é o momento puramente racional, pois "ordem" não é algo que pode ser imediatamente apontado nas impressões sensórias, mas sim algo que pertence a elas apenas em virtude de relações intelectuais. Portanto, a teoria em sua forma pura

[15] FREGE, ***Grundgesetze der Arithmetik***, Jena, 1903, VoI. II, p.69 ff., p.139.

não requer o pressuposto de um grupo de coisas particulares dadas fisicamente, como se tem argumentado contra ela.[16] As variedades que ela fundamenta não estão presentes empiricamente, porém definidas idealmente, são totalidades construídas progressivamente a partir de um certo início e de acordo com uma regra constante. Nessa regra também estão enraizadas todas as determinações genuinamente "formais", que distinguem as séries de números e as fazem o tipo fundamental de qualquer conexão conceitualmente inteligível.

III

Os conceitos de número e de classe

Se, contudo, olharmos o efetivo desenvolvimento moderno dos princípios da matemática, ele pareceria como se o tratamento anterior da matéria tivesse perdido o momento essencial que completa a caracterização lógica do número. Em todas as tentativas feitas de reduzir o conceito de número em "constantes lógicas" puras, o conceito de classe tem sido considerado como uma condição necessária e suficiente. A análise do número parece se completar apenas quando seu conteúdo especial é deduzido da função geral do conceito. Mas, de acordo com a teoria lógica dominante, a formação de conceitos não significa nada mais que a reunião de objetos em espécies e gêneros em virtude da subsunção sob atributos gerais.

Dessa forma, para se entender o conceito de número, tem-se primeiramente de remover dele tudo aquilo que não se adequa a esse esquema. Mas aqui surge uma dificuldade fundamental para a teoria. Se estamos considerando não o pensamento de número em geral, mas o conceito deste ou daquele determinado número, então não estamos tratando de um conceito lógico universal, mas sim de um conceito individual. Não se trata aqui de indicar a espécie que pode ser apontada para uma dada quantidade de exemplos individuais, mas da fixação de uma certa posição definida dentro de um sistema global. Existe apenas um "*dois*", somente um "*quatro*", e ambos possuem certas propriedades e características matemáticas que eles não dividem com nenhum outro objeto. Se a redução do conceito de número ao conceito de classe, a despeito de tudo isso, é possível, então é preciso tomar uma outra direção. Para determinar o que o número "é", respeitando a sua essência pura, não tentaremos analisá-lo diretamente em partes constitutivas mais simples, mas perguntar primordialmente pelo significado da igualdade de

[16] Cf. COUTURAT, ***De l'Infini mathématique***, Paris, 1896, p.318 ff.

números. Tão logo seja estabelecido em que condições devemos considerar dois grupos como possuindo o mesmo valor numérico, a peculiaridade da "marca", que assumimos como idênticas em ambos, é, dessa forma, indiretamente determinada. O critério de igualdade numérica de dois grupos, contudo, consiste em que uma certa relação pode ser dada, em virtude da qual os elementos dos dois grupos podem *ser mutuamente coordenados um a um*. Por conta desse processo de coordenação, estabelecemos certas conexões entre as infinitas classes possíveis, unindo num complexo global aqueles grupos que dessa forma podem ser coordenados. Em outras palavras, unimos numa espécie todas as variedades para as quais existe tal relação de "equivalência" ou coordenação um a um, ao mesmo que consideramos os grupos nos quais essa condição não é satisfeita como pertencentes a diferentes espécies. Quando isso é feito, qualquer grupo individual, em virtude do caráter da equivalência, pode ser considerado como um representante perfeito de todas as espécies, pois, desde que se pode mostrar que dois grupos equivalentes a um terceiro são também equivalentes entre si, basta provar que para um dado todo *M* que ele pode ser coordenado membro a membro com qualquer grupo do complexo global, a fim de estabelecer que o mesmo é verdadeiro para todos os grupos do complexo em questão. Agora, se abstrairmos a relação comum, que cada todo de tal complexo tem um com o outro e a consideramos como um possível objeto do pensamento, alcançamos o momento que na linguagem ordinária chamamos o número desses todos. "O número que pertence a um conceito *F*", afirma Frege, ao qual devemos essa dedução em seus passos principais, "é a extensão do conceito: numericamente igual a *F*'. Nós percebemos o número de um conceito não apenas quando consideramos os objetos por ele caracterizados neles mesmos, mas também quando incluímos todas aquelas classes cujos elementos estão na relação de correspondência um a um com aqueles do todo em consideração.

A teoria de Russell dos números cardinais

A característica dessa concepção é que ela simplesmente toma o ponto de vista ordinário como critério de igualdade numérica e enfatiza-o como o caráter constitutivo peculiar sobre o qual repousa todo o conteúdo do conceito de número. Enquanto a visão tradicional pressupõe os números individuais como "dados", como conhecidos, e decide, tomando por base esse conhecimento, sobre suas igualdades ou desigualdades, aqui o processo se inverte. Somente a relação expressa na igualdade é que é conhecida; os elementos que entram nessa relação possuem seus significados inicialmente indeterminados e apenas pela igualdade é que são gradativamente determinados. "Nosso objetivo é", escreve Frege acerca do procedimento geral, "modelar o conteúdo de um julgamento, o qual pode ser interpretado como uma igualdade, de tal maneira que em cada membro da igualdade exista um número. Queremos assim [...] *determinar por intermédio do conceito já conhecido de igualdade o que deve ser considerado como igual*". Aqui uma linha metodológica é claramente definida, a qual é fundamental na construção de qualquer conceito matemático; o "construto" deve ganhar sua constituição total a partir das relações que ele satisfaz. (Cf. acima) O único ponto que resta verificar é se na relação de equivalência entre classes realmente tomamos uma relação que é logicamente mais simples que a totalidade de funções, que na teoria ordinal conduz as séries sistemáticas dos números ordinais. Um progresso da análise seria, evidentemente, apenas alcançado quando pudéssemos nos abstrair de todas as funções e ainda assim obtermos, através de um novo caminho, a construção completa do reino dos números e de suas leis. É nesse ponto então que toda a investigação crítica deve se concentrar. É realmente possível a dedução da série numérica a partir do conceito de classe, ou essa dedução move-se num círculo através do emprego tácito de conceitos tirados exatamente do campo que ela se propõe a deduzir?[17]

A teoria que tem sido desenvolvida aqui, embora em nítido confronto com a interpretação empírica da natureza do número, concorda com ela em uma característica formal: ela também entende o número como uma "propriedade comum" a certos conteúdos e grupos de conteúdos. A base das afirmações numéricas, contudo, como é especialmente enfatizado, não é para ser procurada nas próprias coisas físicas sensórias, mas globalmente nos conceitos dessas coisas. Todo julgamento acerca de relações numéricas prescreve certos atributos não aos objetos, mas aos seus conceitos, através dos quais eles são divididos em classes com propriedades peculiares. "Quando eu afirmo: *Vênus tem 0 luas,* não existe efetivamente nenhuma *lua* ou agregado de *luas* do qual alguma coisa pudesse ser dita; mas uma propriedade é associada ao conceito "*lua de Vênus*", a saber, que ele não compreende objeto algum. Quando eu afirmo: a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos, eu associo o número quatro ao conceito "cavalos que puxam a carruagem do imperador". Este único fato explica a aplicabilidade universal das asserções numéricas, que cobrem, igualmente, tanto o material como o imaterial, fenômenos interiores como exteriores, tanto coisas como acontecimentos ou experiências. Essa

[17]A questão em pauta tem sido discutida de forma bem viva na moderna literatura lógico-matemática. Para uma exposição positiva da teoria confira, particularmente, os textos de Frege, Russell e Peano. Para críticas conferir: B. Kerry, **ÜberAnschauungundihrepsychischeVerarbeitung**, **Vierteljahrsschr**. f. wissensch. Philos. XI, 287 ff; HUSSERL, **Philosophie der Arithmetik**, I, Ha1le, 1891, p.129 ff.; JONAS COHN, **Voraussetzungen und Ziele des Erkennens**, Leipzig, 1908, p.158 ff

aparente diversidade do campo das coisas que podem ser enumeradas mostra, olhando-se mais de perto, uma rigorosa uniformidade, pois a enumeração nunca diz respeito aos próprios conteúdos heterogêneos, mas aos conceitos que os compreendem, sempre da mesma natureza lógica. A exposição anterior mostrou como isso pode ser precisamente entendido; uma certa determinação numérica é atribuída a conceitos quando eles são reunidos em classes com outros conceitos com os quais eles estão numa relação de correspondência *um* a *um* dos elementos de sua extensão.

A crítica às teorias de "classe"

Contra essa explanação levanta-se de saída uma objeção. A teoria aqui defendida não está interessada de forma alguma em pensar arbitrariamente o conceito geral de número, mas em indicar a real função que o número possui no total do conhecimento. Precisamente ela enfatiza, em oposição à interpretação que parte do número ordinal puro, que as propriedades "lógicas" do número aqui deduzidas são justamente aquelas que são determinantes e essenciais no "uso cotidiano". Uma dedução técnica que meramente tem em vista os objetivos da aritmética científica deve opor-se-á uma dedução natural que contempla as aplicações concretas do número. No entanto, um exame mais acurado mostra que essa meta não é alcançada, pois o que aqui é logicamente deduzido não é, de forma alguma, idêntico ao significado real que associamos aos julgamentos numéricos no conhecimento factual. Se nos limitarmos meramente às considerações anteriores, seremos de fato capazes de, por meio delas, comparar diferentes grupos de elementos e olhá-los como similares de certo ponto de vista. Porém, não adquirimos nenhuma caracterização suficiente de seu "número", no sentido comum da palavra. Nosso pensamento poderia percorrer qualquer quantidade de conjuntos "equivalentes" e considerar suas relações mútuas sem adquirir qualquer consciência característica dos conceitos numéricos puros resultantes do processo. O significado específico de "quatro" ou "sete" jamais poderia resultar da simples reunião de uma quantidade qualquer de grupos de "quatro" ou "sete" elementos, a não ser que antes se entenda os grupos individuais como sequências ordenadas de elementos, ou seja, como números no sentido da teoria ordinal. Nenhuma reinterpretação lógica pode transformar o "quantos" dos elementos, no sentido comum, em uma simples afirmação a respeito de "igual a quantos". Isso permanece como um problema independente e como tarefa do conhecimento. A consideração dessa tarefa, entretanto, conduz a uma oposição metodológica mais profunda entre as duas interpretações de número. É a especificidade fundamental da teoria ordinal que nela o número individual não significa nada em si mesmo, que um valor fixo é atribuído a ele apenas através de sua *posição no sistema total*. A definição do número individual determina de imediato e diretamente a relação na qual ele se coloca diante dos demais membros do grupo, e essa relação não pode ser eliminada sem a perda do conteúdo inteiro dos conceitos numéricos particulares. Na dedução geral do número cardinal, que estamos considerando, essa conexão é eliminada. É também necessário que essa dedução erija e logicamente deduza um princípio fixo de ordenação dos números individuais, embora o significado dos elementos deva ser estabelecido antes dessa disposição e independente dela. Os membros são determinados como propriedades comuns de certas classes, antes ainda que qualquer coisa tenha sido estabelecida a respeito de suas posições sequenciais. Na verdade, todavia, é precisamente nesse momento que inicialmente aqui se exclui, que está enraizado o real caráter numérico. A construção conceitual que fundamenta o número não tende a enfatizar as *similaridades*, como é o caso da doutrina tradicional de abstração, mas procura enfatizar e manter a diversidade. A consideração de conjuntos, que podem ser mutuamente coordenados membro a membro, pode levar à separação de uma marca idêntica neles. Essa marca, todavia, ainda não é em si mesma "número", mas meramente uma propriedade lógica ainda não suficientemente definida. Tal propriedade torna-se número apenas quando ela se separa de outras "marcas" de mesmo caráter lógico, aparecendo com elas em relações de "*mais cedo*" ou "*mais tarde*", ou "*mais*" ou "*menos*". Mesmo aqueles pensadores, que levaram adiante de forma mais rigorosa e consistente a explanação de número através de classes de equivalência, enfatizam que essa explanação é irrelevante para os objetivos metódicos da matemática pura. O que o matemático considera no número são meramente as propriedades nas quais repousam a ordem das posições. O número, em si mesmo, pode ser o que ele quiser, mas, para a análise e a álgebra, só entra em consideração aquilo que pode ser pura e completamente desenvolvida sob a forma de uma "progressão"[18]. Rigorosamente falando, uma vez isso admitido, a disputa acerca da prioridade metódica do número ordinal está encerrada. Pois, onde se adquire informações mais precisas acerca da "essência" do número, no sentido de crítica do conhecimento, se não na sua mais ampla aplicação científica?

O apelo ao significado do conceito de número no pensamento pré-científico também não resiste à crítica. Pelo menos as análises psicológicas não oferecem apoio à teoria. Toda reflexão no estágio atual do pensamento, ao contrário, mostra claramente a diferença interna entre o pensamento de equivalência e aquele do número. Fosse o número apenas o que resulta dessa dedução, então seria uma tarefa peculiarmente complicada e difícil destacar o processo pelo

---

[18] Cf. RUSSELL, *op. cit.,* §230. Sobre o conceito de progressão cf. acima.

qual tal conceito surge e é mantido na consciência. Pois número significa aqui uma relação entre duas classes inteiramente heterogêneas em conteúdo, que são conectadas apenas pela mera possibilidade de coordenação mútua. Masque motivação mental deveria existir em geral para relacionar grupos não-similares entre si. Qual o sentido de, por exemplo, colocar lado a lado a classe das luas de Júpiter com a das estações do ano, o conjunto das peças do jogo de boliche com o conjunto das musas? Tal comparação é inteligível depois do "valor numérico" de cada uma dessas classes e da concordância indireta entre elas terem sido estabelecidas de uma outra maneira. Mas, por outro lado, onde esse valor não é pressuposto, mas adquirido por comparação, a comparação, ela própria, carece de algum padrão ou guia fixo. Tem sido argumentado, contra a teoria da equivalência, que ela leva a um "relativismo extremo" na medida em que a determinação do número deve ser uma propriedade que não pertence ao grupo propriamente dito, mas em relação a outros grupos. Essa crítica é, no mínimo, ambígua, pois o conceito de número pode, de fato, ser em qualquer forma de dedução, apenas um conceito relacional puro. Apenas o campo e, por assim dizer, o lugar lógico da relação é aqui deslocado. Pois enquanto na teoria ordinal estamos preocupados com construções ideais que se relacionam entre elas, aqui cada construção individual é deduzida da relação das "classes" dadas.

A definição lógica de zero e de unidade

Os pressupostos aqui assumidos vêm à luz tão logo se tente dar uma definição estritamente lógica dos números individuais a partir do ponto de vista delineado e se tente determinar as condições sob as quais dois desses números devem ser considerados como sucessivos. De fato, devem surgir graves dificuldades na explanação do zero, pois, obviamente, não existe sentido algum em se falar de coordenação um a um dos diferentes membros das duas classes, no caso em que, por definição, uma dessas classes não contem membro algum. Mas, mesmo que essa dificuldade pudesse ser removida por meio de uma complicada reinterpretação lógica do conceito de equivalência[19], o círculo na explanação se tomaria claro quando partíssemos para a definição do "um". O que significa conceber um objeto como "um" é assumido como conhecido desde o início, pois a "equinumerosidades" de duas classes é conhecida exclusivamente pelo fato de podermos corresponder cada elemento da primeira classe com um e

[19]Cf. sobre este ponto: FREGE, ***Die Grundlagen der Arithmetik***, p.82 ff.; RUSSELL, p.113, e a crítica de KERRY, **Vierteljahrsschr**. f. wiss. Philos. XI, p.287 ff., e também POINCARE, ***Science et Méthode***, Paris, 1908, Bk. II. Para a critica de Frege, cf. NATORP, *op. cit.*, p.112 ff.

somente um elemento da segunda. Essa observação, simples e trivial como parece ser, frequentemente tem dado margem à controvérsia. Tem sido objetado que é diferente quando eu tomo o número um em seu significado estritamente matemático ou simplesmente no sentido vago expresso por um artigo indefinido. É esse último sentido que é pressuposto quando eu sou solicitado a tomar qualquer membro de uma classe *u* e relacioná-lo a um membro de uma outra classe *v*. "Que cada indivíduo ou cada membro de uma classe, num certo sentido, é um", escreve Russell, por exemplo, "é naturalmente incontestável, mas não segue disto que o conceito de "um" é pressuposto quando falamos de um indivíduo. Podemos, se preferirmos, considerar, inversamente, o conceito de indivíduo como o conceito fundamental, a partir do qual o conceito de um é deduzido". Sob esse ponto de vista o significado da afirmação que a classe *u* possui "um" elemento (no sentido aritmético) é determinado pelo fato de que essa classe não é nula e que se x e y são *u's* então x é idêntico a y. Uma caracterização semelhante é fixar o significado do conceito de correspondência um a um entre termos: R é uma tal relação se, no caso de x e x' terem a relação R com y, e x possuía relação R com y e y', então x, x' e também y, y' são idênticos[20]. Todavia, é fácil de ver que aqui a função lógica de número não é bem assim deduzida, mas reescrita através de uma paráfrase técnica. A fim de entender a explanação dada é no mínimo necessário que se compreenda um termo x como idêntico a si mesmo, enquanto que simultaneamente o relacionamos com um outro termo y e julguemos o primeiro como concordando ou diferindo do último de acordo com circunstancias especiais. Agora, se tomarmos esse processo de posicionamento e de diferenciação como base, vemos que nada mais foi feito do que pressupor o número no sentido da teoria ordinal. Assim, por exemplo, a classe de 2 objetos é definida por Russell pelas condições de que ela em geral possui termos e que, se x é um de seus termos, existe um outro termo y da classe que é diferente de x e que, além disso, se x e y são termos diferentes da classe u e z é diferente de x e y, então toda classe que contém z é diferente de u. Vemos agora, para completar a explanação, como os elementos x, y, z são produzidos em progressiva diferenciação e, por isso, são indiretamente diferenciados como primeiro, segundo, terceiro, ...membros.

Em geral, a fim de colocar os diferentes números na forma de uma determinada "progressão", - e é nessa forma, como vimos, que se apoia primordialmente seu significado e uso científico - precisamos de um princípio que nos permita, quando um número n qualquer for dado, definir seu sucessor. Essa relação de "vizinhança" entre dois números é agora determinada,

[20] Cf. RUSSELL, §124-126, §496. FREGE, p.40 ff.

de acordo com a teoria, comparando entre si as correspondentes classes *u* e *v* e correspondendo seus elementos membro a membro. Se restar na classe (*v*) um elemento que não possua correspondente algum na outra classe, então designamos *v*em relação a *u* como a classe imediatamente superior. Postula-se assim que primeiro selecionamos como um todo a parte de *v* que pode ser coordenada membro a membro com *u*, a fim de selecionar o membro que permanece desconectado nessa coordenação como um outro "segundo". Assim a progressão de uma unidade para a seguinte é baseada na mesma síntese intelectual que suporta a teoria do número ordinal. A única diferença metodológica consiste em que essas sínteses aparecem na teoria ordinal como construções livres, enquanto que aqui elas dependem das classes dadas de elementos[21].

Os pressupostos do conceito de classe

Uma consideração final decisiva, no entanto, mostra que a ordem lógica dos conceitos é invertida nessa interpretação. A determinação do número por classes de equivalências pressupõe que essas classes sejam dadas em si como pluralidade. O conceito de "semelhança" de classes que fundamenta o significado de números cardinais exige, no mínimo, a consideração de dois todos conectados por uma certa relação. Tem sido enfatizado que para o estabelecimento dessa relação um a um, não é necessário que os membros das duas variedades sejam previamente numerados, mas que, ao contrário, seja indicada uma lei geral que conecta cada elemento da primeira variedade com outro qualquer da segunda. Mas, mesmo que desistíssemos, de acordo com esse ponto de vista, de uma enumeração prévia das classes individuais que comparamos, permaneceria a situação de que temos que opor as classes uma à outra como todos, e dessa forma a entenderíamos como "duas" diferentes unidades. Poderia ser objetado que essa diferença estaria diretamente dada pela diferença lógica pura entre os conceitos de classes e com isso não seria possível nem necessária uma dedução posterior. Retornaríamos assim das próprias classes para as relações geradoras que lhes fundamentam e que lhes dão seus limites e determinações. A

[21]A fim de explicar a relação que existe entre dois membros vizinhos das séries de números naturais, Frege, por exemplo, parte da proposição: "existe um conceito *F* e um objeto *x* compreendido por ele de tal forma que o número que pertence ao conceito *F* é *n* e o número compreendido por *F* exceto *x* é *m*; "isto é explicado como equivalente a proposição que n é o sucessor imediato de m na série dos números naturais. *Op. cit.,* p. 89. Dessa forma é feita aqui uma distinção dentro da totalidade *F*, pela qual um único membro *x* é selecionado e oposto aos demais: todos esses outros são então usados na definição da vizinhança número "imediatamente inferior". Temos aqui novamente apenas uma circunlocução do ponto de vista "popular", que distingue cada membro da série de números de seus vizinhos pela adição ou subtração de uma "unidade".

diferença nos todos sistemáticos reduz-se à diferença na lei conceitual que lhes dão origem. Desse ponto de vista, contudo, pode-se deduzir diretamente, como se mostra, o sistema de números como números ordinais puros sem o desvio através do conceito de classe. Pois necessitaríamos apenas assumir a possibilidade de diferenciar uma sequência de construtos mentais puros através das diferentes relações com um elemento fundamental que sirva como ponto de partida. A teoria do número ordinal apresenta assim o mínimo essencial que nenhuma dedução lógica de número pode evitar. Embora a consideração de classes equivalentes seja da maior importância para as aplicações do conceito de número, elas não pertencem ao conteúdo original.

Conceito genérico e conceito relacional

Ao mesmo tempo o conflito de teorias matemáticas desemboca novamente nas questões lógicas básicas que formam nosso ponto de partida. Nas diferentes interpretações do conceito de número repete-se a disputa mais ampla entre a lógica dos conceitos gerais e a lógica dos conceitos relacionais. Se o esforço para obter o conceito de número daquele de classes fosse bem-sucedido, a forma tradicional da lógica ganharia uma nova fonte de confirmação. A ordenação de indivíduos em hierarquia de espécies seria agora, como antes, o verdadeiro objetivo de todo conhecimento, tanto empírico como exato. Essa conexão tornou-se bem clara nas tentativas de fundamentar a teoria lógica dos números cardinais. De acordo com Russell, se eu apreendo o pensamento "*dois homens*", então tenho formado o produto lógico dos conceitos "*homem*" e "*par*", e a afirmação de que existe dois homens diz apenas que um certo complexo é dado que pertence simultaneamente a classe "*homem*" e a classe "*par*"[22]. Fica evidente nessa altura que a teoria não levou adiante as ideias críticas fundamentais que a originou. Frege e Russell consideravam como o mérito decisivo de sua doutrina, o fato de o número não aparecer como uma propriedade de coisas físicas, mas como uma afirmação acerca de certas propriedades de classes, e que dessa forma os objetos em si não formam a base dos julgamentos numéricos, mas sim os conceitos desses objetos (cf. acima). É incontestável que, comparada com a interpretação sensória, essa mudança é bem mais profunda e provoca uma liberação extraordinária do pensamento. Contudo não basta enfatizar o caráter puramente conceitual das afirmações numéricas, se conceitos substanciais e conceitos funcionais ainda são colocados em um mesmo plano. Números aparecem, de acordo com essa visão, não como expressão da condição

[22] Cf. RUSSELL, *op. cit.*, §111.

fundamental que possibilita cada pluralidade, mas como uma "marca" que pertence a pluralidade de classes dada e que delas pode ser separado por comparação. Repete-se assim a deficiência fundamental de toda doutrina de abstração: um esforço é feito para ver o que guia e controla a formação de conceitos, *i. e.*, um ponto de vista puramente "categórico" como parte constitutiva dos objetos comparados (cf. acima). A teoria mostra-se ao final como sendo uma tentativa sutil e ampliada de lidar, por meio do esquema geral do conceito genérico, com um problema que pertence, em seu significado e escopo, a um novo campo e pressupõe um outro conceito de conhecimento[23].

IV

A ampliação do conceito de número

As tentativas anteriores de estabelecer o caráter do conceito de número e o princípio de sua formação não tomaram ainda a questão naquela universalidade e amplitude ganhas no desenvolvimento da matemática moderna. É com o número, em sua forma e significado mais primitivos, que se relaciona, mas tentativas de dedução feitas tanto pela teoria das classes como pela teoria ordinal. Fundamentalmente o ponto de vista dos pitagóricos não foi ainda abandonado: o "número", em seu sentido restrito de número inteiro, ainda constitui o único problema efetivo. O sistema científico da aritmética, contudo, somente conclui-se nas ampliações sofridas pelo conceito de número pela introdução das oposições entre números negativo e positivo, fracionário e inteiro e racional e irracional. Essas ampliações são - como matemáticos proeminentes tem asseverado - meramente transformações técnicas, que somente podem ser

[23]De fato, não são apenas os pontos de vista lógicos, mas também razões de natureza matemática, que levam a explanação do número por meio de classes de equivalência. Somente com essa fundamentação pareceu ser possível produzir uma teoria que não ficasse limitada desde o início aos números finitos, mas que incluísse e caracterizasse numa única dedução tanto os números "finitos" quanto os "infinitos". O aspecto da coordenação mútua um a um de grupos parecia de fundamental importância, pois ele permanece quando se abstrai a finitude e, portanto, da enumerabilidade de grupos, - de acordo com a interpretação ordinária de enumeração como avanço sucessivo de unidade para unidade. Por mais frutífero que tenha sido o conceito de "potência", que surge nessa conexão, não tem sido de forma alguma provado que ele é idêntico ao conceito de número. O significado puramente matemático do conceito de "potência" não se altera, evidentemente, se o consideramos como o princípio original do número ou como um resultado derivado que pressupõe uma outra explanação de número. As propriedades, comuns aos números finitos e transfinitos, não contém de forma alguma o elemento essencial para a construção do número em geral: o "summum genus", no sentido da lógica do conceito genérico, não é idêntico aqui a origem conceitual do conhecimento (Sobre o problema dos transfinitos, cf. abaixo p.80 ff.).

explicadas e justificadas nas aplicações, ou essas ampliações possuem a mesma função lógica que predomina já no primeiro estabelecimento do "número"?

A teoria de Gauss para os números negativos e imaginários

As dificuldades na introdução de qualquer novo tipo de número, sempre encontradas sejam eles os negativos e irracionais, sejam eles os imaginários, são facilmente entendidas se considerarmos que em todas essas transformações, o real substrato das afirmações numéricas ameaça desaparecer cada vez mais. A enumeração, em seu sentido mais fundamental e por meio de objetos sensíveis, pode ser mostrada como "real" e dessa forma como válida. O significado de "dois" ou "quatro" parece não constituir nenhum problema sério, pois o mundo empírico das coisas nos oferece em toda parte grupos de duas ou quatro coisas. Com a primeira generalização e ampliação do conceito de número, contudo, desaparece esse conteúdo substancial, no qual especialmente se apoia a interpretação ingênua. O conceito e a própria designação "imaginário" é a expressão de um pensamento que em sua primeira aproximação se efetiva em cada um dos novos tipos de número e lhes confere sua marca característica. São julgamentos e afirmações a respeito do "irreal" que reclamam para si um valor cognitivo definido e indispensável. Essa conexão e o princípio geral, para o qual se voltam todos os diferentes métodos de ampliação do número, é descrita por Gauss com extrema clareza e distinção em uma passagem, na qual ele se coloca a tarefa de fundamentar a verdadeira "metafísica do imaginário". "Números positivos e negativos", ele afirma, "só encontram aplicação onde aquilo que é enumerado tem um oposto, que unido a ele é idêntico a aniquilação. Em estrito senso esse pressuposto só ocorre onde não existem substâncias (objetos imagináveis em si mesmos), mas apenas relações entre objetos são contadas. É postulado dessa forma que esses objetos são ordenados de alguma forma numa série, *e.g., A, B, C, D*, ... e que a relação de *A* para *B* pode ser considerada como a mesma que existe de *B* para *C*. Nesse caso agora pertence ao conceito de oposição nada mais que a reversão da relação; de modo que, se a relação (e assim a transição) entre a *A* e *B* é representada por $+1$, a relação de *B* para *A* é representada por -1. Na medida em que tal série é ilimitada em ambas as direções, todo número real inteiro representa a relação de algum membro, escolhido arbitrariamente como início, para algum membro definido da série". A dedução dos números imaginários se apoia, além disso, no fato de que os objetos em investigação não são mais considerados como ordenados numa única série, mas exigindo para seu ordenamento a consideração de uma série de séries, necessita dessa forma a introdução de uma nova unidade ($+i$,

-i). Eliminando aqui todos os detalhes da dedução surge bem clara a visão lógica dominante. O sentido do conceito de números ampliados não pode ser compreendido enquanto se insiste em mostrar o que eles significam em substâncias, em objetos concebidos neles mesmos, mas revelam-se imediatamente quando neles se vê a expressão de *conexões* puras que governam as relações numa série construtivamente produzida. Uma substância negativa, que seria ao mesmo tempo um ser e um não-ser, seria uma *contradito in adjeto*. Uma relação negativa é apenas o correlato lógico necessário do conceito de relação em geral, pois toda relação de *A* para *B* pode também ser representada e expressa como uma relação de *B* para *A*. Se nós considerarmos, portanto, a relação geradora (*R*) que fundamenta a transição de um membro da série de números para o que lhe segue imediatamente, postulamos também a relação do membro seguinte para o precedente, definindo assim uma segunda direção de progressão, que pode ser entendida como inversa da primeira, ou como a relação inversa (*R'*). Os números positivos e negativos (+*a*, -*a*) aparecem agora meramente como expressão de progressão nessas duas direções das relações (R*a*, R'*a*). A partir dessa concepção fundamental, podem ser deduzidas todas as operações de cálculo dentro do campo ampliado dos números, pois todas essas operações são fundadas no caráter de número puro como número relacional e expressam claramente esse caráter[24].

Fundamentação aritmética e geométrica

Novamente esse desenvolvimento não será acompanhado em todas as suas fases particulares, mas apenas em exemplos típicos nos quais a tendência lógica do pensamento é mais claramente expressa. É na dedução dos números irracionais que o novo princípio é verificado de forma mais saliente. Inicialmente, uma dedução dos números irracionais pode ser tentada por dois caminhos. Poderíamos tanto partir das relações entre segmentos geométricos dados, como da exigência de solubilidade de certas equações algébricas. O primeiro método, predominante até a época de Dedekind e Weierstrass, fundamenta o novo número no conceito de espaço, ou seja, nas relações encontradas entre objetos mensuráveis. Parece novamente ser o caso de experiências com objetos físico-espaciais que controlam o processo de formação do conceito matemático e prescrevem sua direção. Todavia, torna-se evidente quepelomenosoapeloàsrelaçõesentrecoisasempíricasconcretasdevefalhar neste ponto. As relações

[24] Cf aqui particularmente a exposição profunda e a prova dessa conexão em NATORP, *op. cit.*, Caps. III e IV.

entre as medidas das coisas são conhecidas apenas por meio da observação e, assim, dentro dos limites impostos pelos erros de observação. Exigir uma determinação absolutamente exata nesse campo é confundir a própria natureza da questão. Assim, o sistema ordinário dos números fracionários já é, obviamente, um instrumento mental adequado em todos os aspectos para responder as questões que surgem nesse campo. Pois, dentro desse sistema, não existe diferença mínima, uma vez que entre dois elementos quaisquer, não importando a sua proximidade, sempre existe um novo elemento pertencente ao sistema. Assim é oferecida uma distinção conceitual que nunca é alcançada nas relações observáveis das coisas, e muito menos ultrapassada. Dessa forma as relações entre medidas ganhas através de experiências externas jamais podem nos levar ao conceito de irracional em seu significado matemático estrito. Ao contrário, esse conceito deve surgir e se fundamentar de dentro no círculo das prescrições que apoiam a conexão sistemática dos conhecimentos matemáticos. Em todo caso, não são os corpos da realidade física, mas os segmentos puramente ideais da geometria que podem fornecer o desejado substrato para a derivação dos irracionais. O novo problema não surge pela concepção de grandezas dadas e efetivamente disponíveis, mas das leis de determinadas construções geométricas. Uma vez isso reconhecido, a questão seguinte é que a construção, indispensável em qualquer tentativa de dedução, deve desenvolver-se e justificar-se a partir do princípio fundamental do próprio número. O deslocamento da questão do número para o espaço destruiria a unidade e perfeição do próprio sistema da álgebra.

O método algébrico ordinário, que introduz os valores irracionais como soluções de determinadas equações, é claramente inadequado, pois confunde a introdução de um postulado com sua efetivação. Pois, independente do fato de existirem uma infinidade de valores irracionais que não podem ser representados como raízes de equações algébricas, tal explanação não decide se o objeto produzido por elas é univocamente determinado ou se existem diversos valores diferentes satisfazendo as condições impostas. Uma definição adequada não deve caracterizar o objeto ideal ao qual ela é dirigida, meramente através de alguma "marca" particular a ele pertencente, mas deve abrangê-lo e determiná-lo plenamente na sua individualidade característica, que o distinga de todos os outros objetos. Essa individualidade, entretanto, é completamente determinada para qualquer valor numérico, quando sua posição no sistema total é dada juntamente com sua dedução, e com isso é fixada sua relação com todos os outros membros conhecidos do domínio dos números. Essa posição relativa inclui, desde o início, todas as demais propriedades que podem ser atribuídas ao número individual, pois todas essas propriedades dele seguem e nele se baseiam.

A explanação de Dedekind para os números irracionais

Essa ideia condutora aparece em sua forma mais pura na bem conhecida explanação de Dedekind dos números irracionais como "cortes". Se partirmos da totalidade das frações racionais, uma fração sendo definida como uma razão numérica e sem apelo a grandezas mensuráveis e divisíveis, e considerando apenas as relações ordinais puras[25], então todo elemento individual *a*, que podemos selecionar dessa totalidade, separa a própria totalidade em duas classes *A* e *B*. A primeira dessas classes inclui todos os números menores que *a* (*i.e.*, aqueles que precedem *a* na ordem sistemática do todo) e a segunda todos os números que são "maiores" que *a* (*i.e.*, os que seguem *a*). Se, contudo, a designação de qualquer fração individual implicitamente inclui a separação do sistema total, a recíproca desta proposição não é válida, pois nem toda separação, estrita e claramente definida, que pode ser feita intelectualmente, corresponde a um determinado número racional. Por exemplo, se considerarmos qualquer número inteiro positivo *D* que não seja quadrado de um número inteiro, então ele sempre estará entre dois quadrados, de modo que um inteiro positivo A pode ser escolhido a satisfazer $A^2 < D < (A + 1)^2$. Se reunirmos agora todos os números cujos quadrados são menores que *D* em uma classe ***A***e todos os que são maiores que *D* reunidos em uma classe ***B***, então qualquer valor racional possível pertence a uma dessas classes, de modo que a separação aqui introduzida esgota completamente o sistema dos números racionais. Todavia, como se pode mostrar, não existe nenhum elemento nesse sistema que produz essa separação e que seria assim maior que todos os números da classe ***A*** e menores que todos da classe ***B***. Alcançamos assim por meio de uma regra conceitual - pela qual qualquer outro número poderia ser escolhido - uma relação precisa e clara entre classes de números, a qual, todavia, não é representada por nenhum valor numérico individual na variedade definida acima. É essa circunstância que agora provoca a introdução de um novo elemento "irracional"; um elemento que não tem outra função e significado a não ser o de representar conceitualmente a própria "unicidade da separação". O novo número, nesta forma de dedução, não é assim arbitrariamente concebido, nem é introduzido apenas como um mero "símbolo", mas aparece como a expressão de um todo complexo de relações, as quais foram inicialmente definidas de forma estritamente lógica. Ele representa, desde o início, um determinado conteúdo lógico relacional no qual ele pode, de volta, ser decomposto.

[25]Mais particularmente, cf., p. ex., RUSSELL, *op. cit.*, §§144 ff., §230.

O conceito de corte

A objeção que tem sido frequentemente levantada contra a dedução de Dedekind, tanto pelo lado da filosofia como pelo da matemática, é que ela envolve uma hipótese indemonstrável. A *existência* de um, e somente um, elemento numérico em qualquer caso de separação do sistema dos números racionais não é provada, mas simplesmente asseverada a partir de um *postulado* geral. De fato, a exposição de Dedekind permite essa consideração na medida em que ela parte de analogias geométricas com o objetivo de clarear o pensamento fundamental. A *continuidade da linha reta*, é dito, é expressa no fato de que quando todos os pontos de uma linha reta são separados em duas classes de tal maneira que todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então *existe um e somente um ponto da linha reta* que produz a separação de todos os pontos, cortando assim a reta em dois pedaços[26]. O próprio Dedekind caracteriza essa propriedade da reta como um axioma, pelo qual reconhecemos de início a continuidade da reta e nela "introduzimos idealmente" sua continuidade. "Se, em geral, o espaço tem uma existência real, ele não precisa ser necessariamente contínuo, pois inúmeras de suas propriedades permaneceriam as mesmas caso ele fosse descontinuo. E mesmo se estivéssemos convencidos da descontinuidade do espaço, nada nos impediria de fazê-lo contínuo pelo preenchimento intelectual de suas lacunas, se assim o desejássemos. Esse preenchimento, contudo, consistiria na criação de novos pontos individuais e seria feito de acordo com o princípio acima"[27]. Tal oposição entre "ideal" e "real" pode de fato levar à ideia de que nenhuma determinação conceitual, que se impõe a nós no entendimento do domínio dos números, necessitaria então envolver uma determinação do ser. O passo de uma conexão sistemática ideal para a existência de um novo elemento parece envolver uma *metabasis eis allogenos*. Na verdade, não se trata aqui de nenhuma transição injustificada, pois pelo menos no domínio dos números toda a separação dualista entre ser ideal e ser real, entre "essência" e "existência" é irrelevante. Mesmo que no caso do espaço tal separação entre o produto de uma construção geométrica livre e o que o espaço "é" pudesse possivelmente ser mantida, ela perderia no campo do número puro todo seu significado. Nenhum número - os inteiros e, muito menos, os fracionários e irracionais - "é" alguma coisa diferente daquilo que é dito em certas definições conceituais. A hipótese de que para toda separação completa ou "corte" do sistema dos números racionais "existe" um, e somente

[26] DEDEKIND, ***Stetigkeit und irrationale Zahlen***, ed 2, Braunschweig, 1892, p.9 ff.
[27] *Ibid.,* p.12.

um, número correspondente ao corte não implica dessa forma nenhum significado paralelo. O que aqui é dado com absoluta clareza é a determinação da própria separação. Quando o sistema de números racionais é separado em duas classes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ por uma espécie de regra conceitual, podemos decidir com absoluta certeza se algum de seus elementos pertence a uma classe ou a outra e, além disso, mostrar que essa alternativa não deixa de considerar membro algum, *i.e.*, que a separação resultante é completa e exaustiva. O "corte" possui como tal uma "realidade" lógica indubitável, que não precisa ser garantida por nenhum postulado. Além disso, a ordem pela qual os diferentes "cortes" seguem um ao outro não é arbitrária, mas é precisamente prescrita pelos seus conceitos originais. Dados dois cortes ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) e ($\boldsymbol{A'}$,$\boldsymbol{B'}$), chamamos o primeiro maior que o segundo quando um elemento *a* pode ser indicado pertencente à classe $\boldsymbol{A}$ da primeira partição e à classe $\boldsymbol{B'}$ da segunda. Existe assim um critério fixo e universal para a determinação da ordem serial dos "cortes" individuais. Por isso as formas assim produzidas têm o caráter de número puro. Pois o número, em seu significado original, não possui caráter específico algum, mas é simplesmente a expressão mais abrangente da forma ordinal e serial em geral. Toda vez que tal forma ocorrer, o conceito de número encontra aplicação. Os cortes "são" números porque eles formam em si mesmos uma variedade estritamente ordenada, na qual a posição relativa dos elementos é determinada de acordo com uma regra conceitual.

O número como expressão da forma ordinal e serial

Não se trata, portanto, na criação dos novos elementos irracionais, de supor ou assumir de alguma forma o "ser" de outros elementos "entre" os membros conhecidos do sistema dos números racionais. Essa forma de colocar a questão é, na realidade, em si própria sem sentido e ininteligível. Trata-se, na realidade, de que acima da ordem da totalidade originalmente dado, surge um sistema escalonado e mais complexo de determinações serialmente arranjadas. Esse sistema inclui a totalidade anterior e a toma para si próprio, pois a marca característica de sucessão pertencente aos "cortes" vale diretamente para os próprios números racionais, que podem ser entendidos e representados como "cortes". Portanto, encontra-se aqui um ponto de vista inclusivo que determina a posição relativa de todos os membros tanto do antigo como do novo sistema. Vê-se assim como a ideia básica da teoria ordinal do número é mantida. É preciso então abandonar a ideia de que o número surge pela adição sucessiva de unidades e que sua verdadeira natureza conceitual é baseada nessa operação. Tal processo contém, na verdade, um princípio que resulta em totalidades ordenadas, mas de forma alguma o único princípio de produção de tais totalidades. A introdução dos irracionais é, em última análise, nada mais do que a expressão geral desse pensamento. Ele dá ao número toda a liberdade e escopo de um método para a produção de ordem em geral, em virtude do qual membros podem ser posicionados e desenvolvidos em sequência ordenada, sem limitar-se a nenhuma relação especial. O "ser" conceitual do número individual surge assim puro e claramente em sua própria função conceitual, pois se na concepção usual que inicialmente suporta a dedução de Dedekind, um certo número previamente dado "produz" ao mesmo tempo um corte definido no sistema, o processo é ao final revertido, pois essa produção vem a ser a condição necessária e suficiente para podermos falar de "existência" de número. O elemento não pode ser separado de complexo relacional, pois ele não significa nada mais que este complexo e ao mesmo tempo a sua expressão em forma concentrada.

O problema dos números transfinitos

Um novo rumo toma a ideia geral que fundamenta a formação de números quando se passado domínio dos números finitos para aquele dos *números transfinitos*. Aqui acumulam-se as efetivas dificuldades *filosóficas*, pois o conceito de infinito, que aqui é o centro da discussão, tem sido abordado mais no domínio da metafísica que no da matemática. O próprio Cantor, quando no curso de suas fundamentais investigações criou o sistema de números transfinitos, evocou todas as oposições escolásticas entre infinito potencial e infinito atual, entre infinito e indefinido.[28]Com isso somos forçados finalmente a sair da questão do puro significado epistêmico dos conceitos para o problema do *ser* absoluto e suas propriedades. O conceito de infinito parece designar as fronteiras da lógica e o ponto limite no qual ela toca outra região além de sua esfera.

O conceito de "potência"

Todavia, os problemas que conduzem a criação dos números transfinitos surgem com absoluta necessidade de pressupostos puramente matemáticos. Eles surgem na medida em que nós generalizamos o conceito fundamental de "equivalência", que desde o início era o critério de igualdade numérica de conjuntos finitos, para torná-lo aplicável a conjuntos infinitos.

[28]Cf. particularmente CANTOR, ***Zur Lehre vom Transfiniten***, Gesammelte Abhandl. aus der Zeitschr. f. Philosophie u. philos. Kritik. Halle a. S. 1890.

Duas totalidades, - independente se o número de seus elementos é limitado ou ilimitado- são equivalentes ou tem a mesma "potência", quando seus membros podem ser mutuamente associados um a um. Evidentemente que a aplicação desse critério não pode ser efetivamente conduzida no caso de grupos infinitos através da coordenação dos elementos *individualmente* um com os outros, mas pressupõe que uma *regra geral* pode ser dada pela qual uma correlação completa é estabelecida e que pode ser de pronto verificada. Assim temos certeza que a cada número par $2n$ corresponde um número ímpar $2n + 1$ e que, se n percorre todos os números inteiros, os dois grupos de números pares e ímpares são exaustivamente relacionados um a um. O conceito de "potência", que dessa forma é introduzido, ganha somente um interesse especificamente matemático quando se mostrar que ele em si mesmo seja suscetível de diferenciação e *gradação*. Designando todas as totalidades cujos elementos podem corresponder-se um a um com a série de números naturais como pertencentes à *primeira potência*, então surge a questão se a totalidade das possíveis variedades neles esgota-se ou se existem conjuntos com outra posição em relação a propriedade especificada. Este último caso é o que de fato ocorre, como pode ser provado. Enquanto a passagem dos números inteiros positivos para a totalidade dos números racionais não produz mudança alguma na potência, e o mesmo sucede quando passamos do sistema de números racionais para o sistema dos números algébricos, o sistema assume um novo caráter quando acrescentamos a totalidade dos números transcendentes e então o completamos para a variedade dos números reais. Essa variedade representa assim um novo nível acima do nível anterior, pois, por um lado, ela inclui totalidades de primeira potência e, por outro, vai além deles, pois quando tentamos corresponder seus elementos com aqueles da série de números naturais permanece sempre uma infinidade de elementos não associados.[29] A introdução dos números transfinitos a_1 e a_0 é meramente para fixar essa característica diferença básica. O novo número significa aqui nada mais que um novo *ponto de vista*, de acordo com o qual totalidades infinitas podem ser ordenadas. Um grupo mais complexo de características distintivas resulta quando colocamos ao lado dos números cardinais transfinitos, que se limitam a fornecer a potência de grupos infinitos, o sistema dos números ordinais correspondentes, que surge quando não só comparamos os conjuntos em questão em relação ao número de seus elementos, mas também considerando a *posição* dos membros da totalidade. Atribuímos aos conjuntos bem-

[29]Para uma exposição mais detalhada, cf meu ensaio "**Kant und die moderne Mathematik**" (Kant-Studien XII, 21 ff.); para os detalhes consultar a bibliografia do ensaio, bem como a apresentação de Cantor no Mathemat. Annalen.

ordenados[30] M e N o mesmo número ordinal ou o mesmo "tipo ordinal", quando os elementos de cada um deles podem ser mutuamente associados um a um, mas mantendo-se *em ambos a sequência original*. Assim, se *E* e *F* são elementos de *M*, e E_l e F_1 os elementos correspondentes em *N*, a posição relativa de *E* e*F* na sucessão do primeiro conjunto concorda com a posição relativa de E_l e F_1 na sucessão do segundo. Em outras palavras, se E precede F no primeiro conjunto, então E_l deve preceder F_1 no segundo.[31] Portanto, enquanto na comparação das potências de duas variedades pode ser utilizado qualquer arranjo de seus elementos, no estabelecimento do seu tipo ordinal estamos limitados a um certo tipo de sucessão prescrita. Se designarmos todas as séries que podem ser associadas sob essa condição com a sequência de números naturais com o tipo ordinal ω, então podemos, adicionando a tais séries na sua totalidade 1,2 ou 3 membros, formar séries dos tipos $\omega+1, \omega+2, \omega+3$. Além disso, unindo dois ou mais sistemas do tipo ω, podemos criar o tipo ordinal 2ω, 3ω, ..., $n\omega$, e pela repetida aplicação deste procedimento produzimos séries dos tipos ω^2, ω^3,...,ω^n, ou mesmo dos tipos ω^{ω},$\omega^{\omega^{\omega}}$, etc. E eles não são de forma alguma introduzidos como meros símbolos arbitrários, mas são sinais de determinações e *diferenciações* conceituais efetivamente dadas e que podem ser claramente apontadas no domínio das variedades infinitas. A forma da *enumeração* é dessa forma apenas uma expressão da necessária *diferenciação* lógica, que somente dessa forma ganha uma interpretação clara e adequada.

A produção de números transfinitos ordinais

Os problemas metafísicos do infinito atual desaparecem completamente nesse tipo de dedução. Pois trata-se, como tem sido corretamente enfatizado[32], nas novas formas numéricas não tanto de "números infinitos", mas de "números de alguma coisa infinita"; isto é, de expressões matemáticas que criamos com o objetivo de conceber e fixar certas características distintivas de totalidades infinitas. Os conflitos que resultam da junção dos conceitos de "infinito" e de "realidade" estão totalmente afastados, pois nos movemos inteiramente no domínio de construções *ideais* puras. Esses conflitos podem ser apresentados em forma dupla, dependendo deles serem considerados do lado do objeto ou do lado do sujeito, do lado do mundo ou do lado da atividade do Eu cognoscente. Do primeiro ponto de vista, a impossibilidade do infinito atual é mostrada pelo fato de que os *objetos*, aos quais é dirigido o ato

[30] Para a definição de "grupos bem-ordenados", cf CANTOR, ***Grundlagen einer allgemeineren Mannigfaltigkeitslehre***, §2.
[31] CANTOR, *op. cit*, §2, p.5.
[32] S. KERRY, ***System einer Theorie der Grenzbegriffe***, Leipzig e Wien, 1890, p.68. f.

de enumeração e que são pressupostos, como parece ser o caso, ocorrerem apenas em números finitos. Não importa a amplitude e o escopo que atribuímos ao número abstrato, o *contado* é sempre pensado como incluído entre certos limites, pois eles são acessíveis para nós exclusivamente pela experiência, que progride de caso para caso. Olhando do outro ponto de vista, é a *própria síntese psicológica do ato de enumeração* que exclui o infinito atual, pois nenhum "entendimento finito" pode realmente apresentar um número ilimitado de unidades e adicioná-las sucessivamente uma a outra. Mas ambas as objeções perdem sua força diante do "transfinito" quando o limitamos ao seu significado estritamente matemático. A "matéria" da enumeração a nossa disposição é ilimitada, pois ela não é de natureza empírica, mas sim lógico-conceitual. Não são afirmações acerca de coisas, mas juízos a respeito de *números* e de *conceitos numéricos* que são combinadas. Dessa forma o "material" pressuposto não deve ser pensado como dado externamente, mas nascido de construções livres. Tão pouco não se exige processos psicológicos de *atos de representação* particulares isolados e sua subsequente composição. O conceito do transfinito serve bem mais ao pensamento oposto: representa a independência do puro conteúdo lógico de número do ato da "enumeração", no sentido ordinário da palavra. Já na fundamentação dos números irracionais foi inevitável a consideração de classes infinitas de números, as quais puderam ser representadas e apreciadas na totalidade de seus elementos exclusivamente através de uma regra conceitual geral, e não por uma contagem elemento por elemento. A nova categoria de números dá a essa distinção fundamental a importância mais ampla possível. Cantor distingue expressamente a "função lógica" que fundamenta o transfinito do processo de construção sucessiva e síntese de unidades. O número ω não é o resultado da junção indefinidamente repetida de elementos particulares, mas é meramente a expressão do fato de que a totalidade ilimitada de números naturais, na qual não existe o "último termo", "é dado em sua sucessão natural de acordo com a lei". "É até permitido pensar o número recém-criado ω como o limite para o qual tendem os números *1, 2, 3,..., ν,...,* se com isto nada mais é entendido que o fato de que ω é o primeiro número inteiro que segue todos os números ν, isto é, maior que qualquer número ν.... A função lógica que ω nos propicia é, obviamente, diferente do primeiro princípio de geração. Eu a chamo o segundo princípio de geração dos números reais inteiros e a defino de forma mais precisa: dada qualquer sucessão definida de números reais inteiros, entre os quais não existe um que seja o maior, então de acordo com o segundo princípio de geração um novo número é criado que é considerado como o limite desses números, isto é, como o primeiro número maior que cada um deles"[33].

Os dois "princípios de geração" de número (Cantor) \\\

Fundamentalmente esse "segundo princípio de geração" somente é possível e frutífero porque ele não representa nenhum procedimento totalmente novo, mas apenas preserva uma ideia que é imprescindível em qualquer fundamentação lógica de número. Considerações das propriedades de coisas externas, tais como aquelas de conteúdos psíquicos particulares e atos de representação, revelaram-se incapazes não somente de construir a série de números "naturais" em sua legítima ordem, mas também de torná-la mesmo inteligível. Já aqui não era o simples acréscimo de uma unidade a outra que dominava a formação de conceitos, mas mostrou-se que os elementos individuais da série de números, e com isso sua extensão total, só podiam ser deduzidos pela consideração de uma e da mesma *relação geradora*, concebida como *idêntica em seu conteúdo* e mantida constante em todas as diversas aplicações particulares. É essa mesma ideia que agora ganha uma formulação mais apurada. Assim como a multiplicidade infinita dos números naturais ao final é estabelecida através de um conceito, isto é, de acordo com um princípio universal, também seu conteúdo pode ser novamente englobado num único conceito. Para o pensamento matemático, a relação fundamental que inclui em si todos os elementos que dela derivam torna-se, ela própria, um novo elemento, uma espécie de unidade fundamental, da qual uma nova forma de construção de número se inicia. A totalidade infinita dos números naturais, na medida em que ela é "dada por uma lei", isto é, na medida em que ela é considerada e tratada como uma unidade torna-se o ponto de partida para uma nova construção. Da primeira ordem surgem outras ordens cada vez mais complexas que usam a primeira ordem como material básico e a fundamenta. Uma vez mais vemos a liberação do conceito de número do conceito de *multiplicidade coletiva*. Pretender entender e representar o "número" ω como um agregado de unidades individuais seria sem sentido, e negaria seu próprio conceito. Por outro lado, garante-se o ponto de vista ordinal, pois não há contradição no conceito que introduz um novo elemento que segue todos os demais da série de números naturais, desde que se garanta que essa totalidade seja ignorada e logicamente exaurida em um conceito simples.

[33] CANTOR, Grundlagen, §11, p.33.

Também o problema da infinitude do tempo deve de saída ficar totalmente excluído. Pois o sentido de "sucessão" em uma série é independente da sucessão temporal concreta. Como três não segue o dois no sentido de uma sucessão de eventos, mas que a relação indica meramente a circunstância lógica de que a *definição* de três "pressupõe" a de dois, vale o mesmo num sentido mais estrito ainda para a relação entre o transfinito e os números finitos. Que o número ω é para ser colocado "depois" de todos os números finitos da série de elementos naturais, significa ao final apenas esse mesmo tipo de dependência conceitual na sequência de fundamentação. Os juízos que envolvem o transfinito revelam-se como afirmações complexas que podem ser reduzidas por análise às determinações relacionais entre totalidades infinitas de números "naturais". Nesse sentido prevalece uma permanente continuidade conceitual entre os dois domínios. As novas construções são "números" na medida em que elas possuem nelas mesmas uma forma serial prescrita, e, portanto, obedecem a certas leis de *conexões* aritméticas, que são análogas aquelas dos números finitos, ainda que não concordem com elas em todos os pontos.[34]

Assim as novas formas de números negativo, irracional e transfinito não são introduzidas no sistema de números a partir do exterior, mas cresce a partir do desdobramento contínuo da função lógica fundamental que foi efetiva desde seu início. Uma nova direção básica aparece, contudo, assim que nós avançamos do sistema completo e fechado dos números reais para os sistemas de números complexos. Trata-se agora, segundo a "metafísica do imaginário", que Gauss fundou e desenvolveu, não mais do estabelecimento da lei mais geral da ordem de uma série, mas antes com a unificação da uma pluralidade de séries, as quais, cada uma, é dada por uma relação geradora definida. Com esta transição para uma variedade multidimensional, surgem problemas lógicos que encontram suas formulações completas no campo da geometria geral, além dos limites da doutrina pura de números.

[34]Para a aritmética do transfinito, *cf.* particularmente RUSSELL, *op. cit.,* §286, §294.