Perspectiva Filosófica, vol. 46, n. 1, 2019

DEMONSTRAÇÃO, VERDADE E ENTENDIMENTO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: UM ESTUDO DE CASO A PARTIR DO TEOREMA DAS QUATRO CORES

Igor de Camargo e Souza Câmara[1]

RESUMO

O presente trabalho argumenta que o conhecimento matemático não é redutível a uma coleção de teoremas demonstrados e verificados (e, portanto, verdadeiros para todos os fins). Defende-se que as ideias de entendimento e explicação matemáticas são essenciais não apenas para a prática e heurística matemáticas, mas também para as fundações da disciplina. Para tanto, examina-se o caso da clássica demonstração computacional do Teorema das Quatro Cores, de Appel-Haken, que é discutida sob uma perspective filosófica, considerando-se a rica bibliografia sobre o tópico. Este foi um dos primeiros teoremas originais demonstrados com ajuda considerável do maquinário computacional, em um esforço que envolveu checagem exaustiva de caso, e foi responsável por fomentar uma discussão relevante sobre diversos tópicos da epistemologia matemática.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático. Demonstração. Validade. Entendimento.

ABSTRACT

In this paper, I argue that mathematical knowledge is not reduced to a collection of proved and verified (hence, true to all practical matters) theorems. I defend that the ideas of mathematical understanding and mathematical explanation are essential not only to mathematical practice and heuristics but also to the very foundations of the discipline. To accomplish that, I examine the classic Appel-Haken proof of the Four-Color Theorem and discuss it from a philosophical perspective, taking on account the rich literature on the topic. The Four-Color Theorem was one of the first original theorems to be proved with considerable help from computational machinery, employed for performing exhaustive case checking, and that was responsible for encouraging a relevant discussion on several topics of mathematical epistemology.

Keywords: Mathematical Knowledge. Proof. Validity. Understanding.

---

[1] Doutorando, Universidade de São Paulo (USP). E-mail: igor.camara@usp.br.

Introdução

Este trabalho pretende reconsiderar alguns conceitos centrais da filosofia da matemática à luz de um caso particular extraído da história da disciplina: a demonstração de Appel-Haken do Teorema das Quatro Cores. A discussão suscitada por essa demonstração permite concluir que o escopo desses conceitos é insuficiente para uma compreensão satisfatória da natureza do conhecimento matemático.

A primeira seção se ocupará da chamada "teoria clássica", apresentando uma visão panorâmica de algumas definições correntes de conceitos importantes para a matemática. Depois disso, serão apresentados alguns trabalhos clássicos que confrontaram essa teoria, sublinhando os aspectos desejáveis e as carências de suas teorias. Essa segunda seção termina com a exposição do que, de acordo com a argumentação proposta, não tem ainda um tratamento adequado. Os motivos para as propostas ficam mais claros após a apresentação e discussão do Teorema das Quatro Cores (seções 3 e 4). Por fim, uma conclusão sumariza os principais pontos da discussão.

1

O que chamarei de "teoria clássica" da matemática não pode ser identificada a um tratado que, de modo sistemático, enumera suas teses. Ao contrário, ela é um substrato com grau de aceitação razoável do que se pensou sobre a natureza do conhecimento matemático e está espalhada, como variações sobre um tema, por inúmeros textos. Entre eles, alguns que se dedicam especificamente à matemática, mas também outros mais gerais, como textos que versam sobre a natureza do conhecimento científico ou mesmo do conhecimento, sem qualificativo.

A fim de melhor entender essa ortodoxia, enumeremos algumas de suas características centrais. Como afirmado anteriormente, essa teoria não se identifica a uma única fonte e, assim, nem todas as teses que serão enumeradas estão em todas as suas versões. Mas, de modo geral, estes são seus pontos centrais.

De acordo com a teoria clássica, o conhecimento matemático é dedutivo. Isto é, segue-se da união de um conjunto de premissas e um sistema de regras de inferência e sua direção é do mais ao menos geral. As conclusões que são extraídas partem sempre desse conjunto inicial de axiomas e são derivadas através da manipulação de acordo com as regras. Contudo, uma posição bastante difundida é que essas conclusões já estão contidas nas premissas e, portanto, não trariam nova informação; seriam tautológicas.[2]

Além disso, a matemática também é *a priori*, ou seja, a justificação de suas asserções se baliza apenas no entendimento dessas asserções e no significado de seus termos. Outra versão (SWART, 1978, p.698) liga a *aprioricidade* à modalidade da necessidade.[3] Isto é, a verdade matemática é independente de contingências e seu escopo abarca todos os mundos possíveis, para usar a expressão de Leibniz.

De acordo com essa caracterização, a natureza da matemática é fundamentalmente diversa daquela das ciências naturais. Um aspecto que ressalta essa diferença é a ênfase na durabilidade do conhecimento matemático. A história da ciência é também a história de uma sucessão de erros. As melhores teorias do passado foram eventualmente mostradas incorretas.[4] Por outro lado, ainda de acordo com a tese clássica, esse não parece ser o caso da matemática. Por seu caráter dedutivo e *a priori*, uma demonstração é, em última análise, eterna. Nesse sentido, o conhecimento matemático é um verdadeiro acúmulo, já que o estoque de teoremas só pode crescer em função do tempo. Essa visão pode ser vista, por exemplo, no testamento intelectual do célebre matemático britânico G. H. Hardy, "Em Defesa de um Matemático". Segundo ele:

> (...) como demonstração abundantemente a história, as realizações matemáticas, seja qual for o seu valor intrínseco, são as mais duradouras de todas. (…) Assim, a matemática grega é 'permanente', mais permanente até

[2] O problema da não informatividade da dedução é referido, na literatura filosófica, por "escândalo da dedução" e tem uma série de outros desdobramentos relevantes para a filosofia, mas que não cabem no escopo deste ensaio.

[3] Há, na literatura filosófica, bons argumentos pela separação da noção de aprioricidade enquanto anterior aos sentidos e a de necessidade. Ver sobretudo Naming *and Necessity*, de Kripke (1972). Além disso, de acordo com alguns autores também há exemplos de proposições a priori e contingentes, de modo que ambas as noções, a priori/a posteriori e necessária/contingente são independentes. Swart parece ignorar essa distinção por julgar que a noção 'pura' de a prioricidade, se levada ao pé da letra, é inoperável. Não entraremos em um debate aprofundado sobre o tema.

[4] Este exemplo de análise histórica compõe o chamado argumento meta-indutivo pessimista, no contexto do debate sobre o realismo científico. Ver, por exemplo, Laudan (1981). No entanto, aqui não nos interessam suas conclusões no âmbito do realismo e seus antagonistas, mas apenas a comparação com a história da matemática.

> que a literatura grega. Arquimedes será lembrado quando Ésquilo tiver sido esquecido, porque as línguas morrem e as ideias da matemática, não. 'Imortalidade' pode ser uma palavra tola, mas provavelmente são os matemáticos que têm a maior probabilidade de alcançá-la, seja ela o que for. (HARDY, 2000, 76-77, grifo nosso)

Um último aspecto da teoria clássica que merece ser destacado é essa identificação do conhecimento matemático com a coleção de afirmações verdadeiras que se seguem dos conjuntos de axiomas - isto é, os teoremas. Em outras palavras, (i) aquilo que sabemos pode ser expresso por asserções (traduzidas em alguma linguagem formalizada, como por exemplo a teoria dos conjuntos axiomática); (ii) se conhecemos realmente a verdade dessas asserções, temos uma demonstração para ela e essa demonstração, se não está inteiramente formalizada pode, em princípio, sê-lo; (iii) a totalidade dessas asserções e suas demonstrações equivale ao nosso conhecimento na disciplina. O medalhista Fields William Thurston descreve uma visão parecida, que ele chama de DTP – *Deduction, Theorem, Proof* – e caracteriza da seguinte maneira:

> D. mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms “given” about these structures, that
> T. there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and
> P. the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials. (THURSTON, 1994, p. 2-3)

2

Evidentemente, a teoria clássica não é unânime. Ao longo da história, algumas objeções importantes foram mobilizadas contra suas teses. Em 1967, Imre Lakatos publica o diálogo Proofs and Refutations, resultado de sua tese de doutoramento escrita uma década antes. O livro retrata uma sala de aula onde um professor interage com seus alunos sobre um determinado problema matemático: as relações entre aspectos de poliedros regulares. O diálogo procede de modo que os estudantes vão levantando hipóteses e esboçando demonstrações, que vão sendo postas em questão pelos demais, seguindo a batuta do seu professor. Em determinado momento, quando acreditam ter uma demonstração da relação V - A + F = 2, onde V são vértices; A, arestas e F, faces, surge um contraexemplo. Ou seja, essa relação, que parecia universal, não vale para todos os poliedros. O teorema ainda funciona, entretanto, mas para um escopo reduzido de casos.

O exemplo de Lakatos é interessante por condensar a história da matemática - a conversa entre a classe e o professor imaginados realmente aconteceu, mas não ao longo de algumas horas, senão muitos anos, e se deu entre pesquisadores. Dois aspectos de sua apresentação merecem destaque: em primeiro lugar, há um ataque contra a concepção clássica de que os teoremas, uma vez provados, são eternos. Isso pode ser verdade em uma versão idealizada do fazer matemático, mas não é válido na experiência concreta. A relação dos poliedros havia sido *provada* até o aparecimento de um contraexemplo, o que culminou na alteração do enunciado original. Esse não é um caso isolado. A demonstração que Andrew Wiles deu ao "Último Teorema de Fermat" também tinha defeitos que o próprio Wiles, após mais de um ano de trabalho solitário, não conseguiu sanar. Mais tarde, com ajuda de um de seus alunos, o problema foi finalmente contornado e o teorema foi estabelecido com segurança. Ainda outro caso é o próprio Teorema das Quatro Cores, que será discutido em detalhes mais adiante. Várias demonstrações foram apresentadas para ele desde sua formulação como conjectura; no entanto, todas tinham problemas.

O segundo aspecto está relacionado ao primeiro: ao considerar aspectos históricos, Lakatos chama a atenção para a importância de encarar a "face humana" do conhecimento matemático; sua história e dinâmica particulares. Esse ângulo é negligenciado pela teoria clássica, que trata de uma versão idealizada da matemática. As motivações gerais dessa empreitada foram assumidas, de formas particulares, por uma série de outros pesquisadores que, não obstante, muitas vezes foram relegados às franjas da discussão filosófica sobre a matemática. Citamos, a título de exemplo, a fascinante exposição panorâmica de Reuben Hersh, *What is Mathematics, Really?* (1997), que se debruça sobre os *outsiders* e “humanistas” na filosofia da matemática; a nascente e vicejante área de estudos da filosofia da prática matemática (ver Mancosu, 2008) e, finalmente, Steiner (1978), que se ocupa do problema da explicação na matemática.

Ao dar atenção para a prática matemática, esses autores passam a considerar facetas que não tinham interesse epistemológico no contexto teoria clássica. Como a matemática se restringiria a manipulação cega de símbolos segundo regras previamente estabelecidas, qualquer demonstração $K \vdash \alpha$, de uma sentença α a partir de um conjunto de pressuposições K, seria adequada. Na nova perspectiva, há certos aspectos que não apenas tornam uma demonstração mais agradável ou mesmo melhor que outras, mas que colaboram em maior grau com o avanço do conhecimento matemático, que passa a ser visto como mais do que uma coleção de sentenças acompanhadas de demonstrações. Agora, ele também inclui as ferramentas que tornam possível os processos de raciocínio, o grau de *insight* que fornecem e as possibilidades de investigação que abrem. Esses tópicos serão discutidos mais pormenorizadamente no decorrer do artigo.

É importante notar que a consideração de aspectos de uma demonstração que ultrapassem sua mera correção não depende de uma confusão entre os domínios da descoberta e da justificativa. Afinal, uma objeção possível é de que características como a beleza de uma demonstração e os pormenores de sua proposição interessam apenas à história, e não ao plano do conhecimento matemático. O argumento proposto é que essas e outras facetas das demonstrações revelam aspectos constitutivos do saber matemático em si mesmo. Impactam, portanto, o domínio da justificativa.

Entre elas, destaca-se a noção de *entendimento* matemático, proposta por Steiner (1978). O entendimento não se enquadra perfeitamente aos moldes clássicos porque diz respeito a algo que não seria fundamental para o estabelecimento das demonstrações matemáticas. Ele ultrapassa a mera correção lógica dos passos de uma demonstração. Steiner o considera um tema importante e tenta analisar esse conceito. Começa por citar três candidatos intuitivos para dar conta dessa noção: (i) sua abstração e/ou generalidade; (ii) sua 'visuabilidade'; e (iii) o aspecto genético que originou a descoberta do resultado. Ele recusa essas três possibilidades para apresentar, então, sua hipótese, uma espécie de essencialismo enfraquecido baseado no conceito de propriedade caracterizante (c*haracterizing property*, no original). Essas propriedades seriam aspectos constitutivos - *necessários* ou *essenciais* - de um determinado objeto matemático e toda demonstração explicativa deveria aludir a eles. O grau de explicabilidade estaria ligado à menção das propriedades caracterizantes.

Sua visão é relevante porque busca inserir na demonstração propriedades que extrapolam sua correção sem que seja necessário olhar para os sujeitos que fazem a matemática. Isto é, se ele rejeita a proposta da teoria clássica de que só a correção importa para uma prova, ele também não subscreve ao argumento de Lakatos de que a face humana da matemática é relevante para entender seu funcionamento.

Tomemos, por exemplo, o critério levantado da visuabilidade, isto é, o que a demonstração permite ver. Essa propriedade não se restringe a diagramas ou exemplificações visuais, por exemplo, como na geometria. A própria disposição de elementos algébricos já é suficiente, como atesta o seguinte exemplo de Steiner (1978): para demonstrar que $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ de forma simples e eficiente, basta usar a indução:

$$S(n+1) = S(n) + (n+1) = n(n + 1)/2 + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$$

Entretanto, segundo Steiner, uma demonstração mais iluminadora é dada por:

$$\begin{array}{lccccccc} S = & 1 & + \; 2 & + \; 3 & + \ldots + & (n-2) & + \; (n-1) & + \; n \\ \underline{+\, S =} & \underline{n} & \underline{+ \; (n-1)} & \underline{+ \; (n-2)} & \underline{+ \ldots +} & \underline{3} & \underline{+ \; 2} & \underline{+ \; 1} \\ 2S = & (n+1) & + \; (n+1) & + \; (n+1) & + \ldots + & (n+1) & + \; (n+1) & + \; (n+1) \end{array}$$

Embora essa demonstração seja formalmente mais frágil, dado o emprego de reticências, signos metateóricos, ela nos parece aceitável, já que vemos que, em princípio, é possível formalizá-la. Nossa preferência é justificada pelo fato de que, com ela, *entendemos* exatamente o que dá origem à estranha expressão n(n+1)/2. O processo de construção da fórmula é elucidado pela prova, que dispõe os elementos do somatório para que compreendamos o que está acontecendo “por trás” da indução.

A visuabilidade, portanto, está ligada à propriedade de *mostrar* o que "está ocorrendo" por trás da demonstração; o que, afinal, justifica um teorema. Essa característica não pode, entretanto, ser dissociada da natureza de quem está de fato interagindo com a prova; isto é, os humanos e, em especial, aqueles que participam da comunidade matemática. A visualização dos mecanismos depende, de forma fundamental, daquele que está enxergando.[5] Nesse sentido, parte das motivações programáticas de Lakatos voltaram pela porta dos fundos. A relevância dessa orientação ficará patente no caso do Teorema das Quatro Cores, que será examinado a seguir.

Antes disso, explicitaremos as hipóteses que pretendemos tratar. Em primeiro lugar, a rejeição das testes clássicas acerca do conhecimento matemático. As demonstrações não são eternas, como mostra a história. Mais do que isso, os conjuntos de teoremas não compõe a totalidade do conhecimento matemático e, em alguns casos, são subprodutos menos interessantes do que as ferramentas e técnicas que tornaram possíveis suas demonstrações. Para uma compreensão adequada da matemática, é necessário - como enfatizaram alguns autores, em especial os supracitados nesta seção - atentar para outros aspectos antes negligenciados, como explicabilidade, visuabilidade, elegância, entre outros. Essas medidas, defendemos, não são apenas acessórias no estudo da matemática enquanto campo de conhecimento; ao contrário, são fundamentais para a compreensão integral da natureza da matemática. Em oposição a autores que procuraram restringir sua visão ao objeto de estudo dos matemáticos, como Steiner, defendo que a consideração de aspectos relativos aos construtores do conhecimento é relevante para o entendimento dessa natureza. O exemplo do Teorema das Quatro Cores corrobora com a tese de que aquilo que chamamos face humana da matemática é essencial para entender sua natureza e que, assim, serve de evidência para essa orientação programática de estudo. A chave para o conceito fundamental de *entendimento* na matemática está, também, na consideração de quem realiza a matemática.

[5] Catarina Dutilh Novaes (2013) tece interessantes considerações sobre o entrelaçamento do raciocínio matemático e do aparato cognitivo do ser humano, incluindo detalhes sobre sua educação. Entre os exemplos considerados há o de um geômetra cego que alega que, em virtude de sua deficiência visual, pôde elaborar uma demonstração sobre uma propriedade das esferas que não seria alcançável, a princípio, por pessoas plenamente dotadas da visão. O quanto esse conhecimento acerca do ser humano pode ajudar a avançar nosso conhecimento matemático ainda é assunto em pauta, e evitamos o risco de uma opinião muito assertiva.

3

3.1 O Problema e sua História[6]

Parte da atração exercida pelo Teorema das Quatro Cores é motivada por razões semelhantes àquelas que despertam interesse por outros problemas célebres da matemática, como as conjecturas de Goldbach ou Collatz. Essas questões combinam uma simplicidade de formulação - de modo que até uma criança, com um pouco de instrução, pode compreender o que afirmam - com uma resistência à demonstração pouco natural. Mesmo quando uma demonstração é dada, poucos iniciados conseguem acompanhar seus passos. Essa disparidade contraria a intuição matemática que nos faz crer que forçosamente deve haver uma demonstração que combine simplicidade e elegância, espelhando-se na natureza do problema. Mas a experiência atesta que nem sempre este é o caso.

Há duas histórias para o surgimento do Problema das Quatro Cores. A primeira não é amplamente aceita, porque sua atribuição depende de um erro de equivalência lógica - trata-se, na verdade, de outro problema que, por algum tempo, julgou-se que era equivalente ao Problema das Quatro Cores. Qual era o problema e porque ele não é equivalente são tópicos que serão examinados mais adiante. Voltemos ao Problema das Quatro Cores. Seu enunciado é o seguinte: que qualquer mapa plano que obedeça a alguns ditames simples, como a continuidade de seus territórios[7], pode ser colorido com apenas quatro cores.

Walters (2004, p.2) afirma que primeira versão de sua formulação, menos aceita como certidão legítima de nascimento, é atribuída ao matemático e astrônomo alemão August Ferdinand Möbius. Möbius teria relacionado o problema a outro, mais facilmente demonstrável: o Problema dos Cinco Príncipes. A ideia era que uma certa região deveria ser dividida de modo que cinco áreas distintas e sem intersecção se tocassem todas umas às

[6] Duas fontes serviram de informativo histórico: o livro de Robin Wilson (2013) e o artigo de Mark Walters (2004). A maioria do que é exposto aqui se deve a esses autores.

[7] Isso evita o caso em que um país tem um território adicional, cujas bordas não estão ligadas a ele, mas envoltas por outros países. Isso fará com que dois territórios separados no mapa tenham, forçosamente, a mesma cor; o que pode causar problemas na coloração do mapa como um todo. A cartografia nos mostra uma série de eventos que contrariam essa instrução.

outras. Chamemos essa afirmação de 5P, e o Problema das Quatro Cores de PQC. É fácil ver que: 5P → ~(PQC) e, por contrapositiva e dupla negação, PQC → ~(5P).

No entanto, o que Möbius afirmou era mais forte do que isso. Segundo seu raciocínio, a ligação lógica entre as duas afirmações era: ~(5P) ↔ PQC e, por contrapositiva e dupla negação: 5P ↔ ~(PQC). Logo, se alguém provasse que era impossível resolver o Problema dos Cinco Príncipes, haveria provado que era possível colorir um mapa usando apenas quatro cores. Ainda que se baseasse em um raciocínio errado, essa demonstração persistiu até 1959, quando o geômetra H.S.M. Coexter evidenciou o erro (Ibid., p.2). Em suma, embora a inexistência de um mapa plano com 5 regiões adjacentes fosse condição suficiente para que todo mapa fosse 4-colorível, não era condição necessária. Em princípio, poderia haver um mapa que, mesmo sem ter essas 5 regiões adjacentes, só poderia ser colorido de forma a deixar regiões adjacentes com a mesma opção de cor e que, portanto, não seria 4-colorível.

A outra história da gênese do problema conta que em 1852 Francis Guthrie, então estudante em Londres, notou que era possível colorir o mapa da Inglaterra empregando apenas quatro cores. Curioso, formulou o problema e o enviou a seu irmão, Frederick, então instruído pelo célebre lógico Augustus De Morgan. Nenhum dos dois encontrou solução. Por fim, De Morgan expôs o problema a seu colega Sir William Rowan Hamilton, pondo fim ao ciclo que marca o nascimento do problema (Ibid., p.1)

A conjectura continuou a ser debatida - e, de fato, continua sendo, até hoje - durante mais de um século, e uma demonstração correta, ainda que polêmica, só surgiu em 1976, pelo trabalho de Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Passaremos por cima dos detalhes para atentar a dois pontos da história: a reformulação do problema e sua primeira demonstração (incorreta), dada por Kempe e, finalmente, a **demonstração correta, sua natureza e implicação filosófica**.

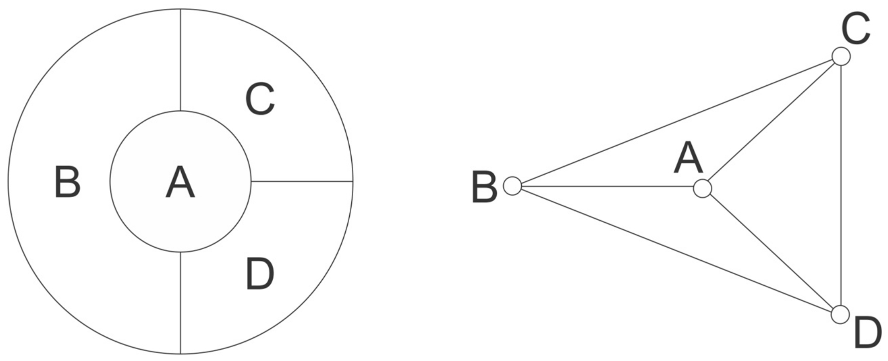

Figura 1: Um mapa hipotético, com quatro países (A, B, C e D) (esq.) e sua interpretação como grafo, onde cada país é representado por um vértice e suas fronteiras são representadas por arcos (dir).

Um dos avanços que levou à eventual solução do problema, e que foi usado tanto na demonstração errada, de Kempe, quanto na bem-sucedida, de Appel-Haken - demonstração que seguiu a partir da trilha traçada por Kempe - foi sua reformulação no instrumental teórico da Teoria dos Grafos. A proposta era de que mapas fossem reinterpretados em grafos, onde vértices representariam países e arestas, suas fronteiras. Por fim, falaremos do grau de um vértice querendo dizer o número de arestas que saem dele.

A demonstração de Kempe já é sofisticada do ponto de vista técnico e envolve tanto um raciocínio indutivo, quanto enumeração e checagem de casos, que é justamente onde o erro foi cometido. Passaremos por ela de maneira geral. Em primeiro lugar, há o estabelecimento do seguinte fato (**a**): todo grafo planar[8] tem um vértice com grau 6 ou menos (Ibid., p.4).

Após estabelecida essa proposição, Bravaco & Simonson (2015) fornecem a seguinte explicação do prosseguimento do argumento: consideremos cinco casos, quando o grafo tem um vértice mínimo de grau 5, 4, 3 ou 2.[9] Em seguida, tomamos cada um desses casos e fornecemos um exemplo construtivo de como colorir um mapa a partir de seu vértice mínimo. Essa

[8] A ideia de grafo planar está ligada à de mapas cujos territórios sejam contíguos. Um grafo planar é um grafo que pode ser inserido em um plano ou, simplesmente, um grafo cujas arestas se encontrem apenas em seus vértices, i.e. não se cruzem. (BONDY, 1976, p. 135)

[9] Segundo Bravaco & Simonson (2015): "the degree can't equal one because then there would be a non-triangular face in the graph". No entanto, parece-nos que o caso hipotético onde houvesse um vértice mínimo de grau um é tão trivial quanto os que consideram vértices mínimos de graus 2 ou 3, como o exemplificado abaixo.

construção será feita através de indução, por um procedimento que elimina o vértice mínimo e depois recolore o mapa. A coloração do mapa sem o vértice é possível por hipótese indutiva (forte) para qualquer mapa com número de vértices $n \leq 1$. Após a retirada e coloração, reinserimos o vértice e lhe damos uma cor de acordo com um método[10]. Para os primeiros casos, o procedimento é simples. Por exemplo, para o grau mínimo = 2, temos:

> If there is a node *x* with degree two, then remove it and all edges incident to it. By induction, the graph that remains is four-colorable. Let the colors of the two nodes that were incident to *x* be B and G. Now add the node *x* back in, and color it R or Y. This is a four-coloring of the original graph. (Bravaco & Simonson, 2015)

Os casos $3 \geq n \geq 2$ são óbvios e seguem diretamente da definição. Afinal, se é possível colorir o grafo sem o vértice mínimo, e o vértice mínimo não está ligado a mais de três vértices, é evidente que podemos colori-lo usando a cor que falta, ainda que cada um dos outros vértices em contato com o mínimo tenha cor diferente. A dificuldade surge nos dois casos restantes, quando o vértice mínimo tem grau 4 ou 5. Nesses casos, precisamos garantir que cada um dos outros vértices que está ligado ao mínimo não tem uma cor diferente; caso contrário, o mapa não seria 4-colorível.

Não exploraremos a construção de Kempe em detalhes. Por enquanto, basta notar a ideia geral de seu algoritmo: dado um vértice de grau 4, e dado que os vértices com os quais ele se toca estão coloridos com cores distintas - por exemplo azul, amarelo, vermelho ou verde - há uma forma de recolorir o grafo para que dois destes vértices passem a ter a mesma cor. Essa construção se faz a partir do conceito de Cadeia de Kempe, uma sequência linear de vértices que se alternam entre duas cores. Fazendo modificações a partir dessas cadeias, como a inversão de cores (i.e. transformar uma cadeia amarelo-azul-amarelo em azul-amarelo-azul), podemos fazer o vértice em questão ser colorível por uma das cores de nosso conjunto de quatro cores sem que tenhamos nós de mesma cor ligados por arestas.

Por onze anos, a demonstração de Kempe foi aceita, até que Heawood publicou um artigo com um contraexemplo. Esse caso (na verdade, há

[10] Walters (2004) nos apresenta um procedimento um pouco diferente, mas equivalente. Ele sugere que o processo de retirada do vértice mínimo prossiga até que haja apenas um vértice (o que é possível, porque a cada etapa temos um grafo e vale o fato (a)), e, depois, colorimos os vértices repetindo o processo inverso. De modo geral, os dois métodos realizam a mesma coisa.

vários deles, como os grafos de Frisch, Soifer e Errera) não contradiz propriedade de ser 4-colorível, mas tão somente o algoritmo de Kempe para a 4-coloração. De certo modo, a comunidade voltara à estaca zero[11] e tinha em mãos somente uma conjectura para a qual não havia perspectiva de contraexemplo.

Por outro lado, se aceitarmos ao menos parte da análise de Lakatos, veremos que o progresso não é linear, do tipo: conjectura-demonstração-teorema, e as ideias de Kempe serviram para a demonstração definitiva. Alguns conceitos chave foram elaborados, compondo o arcabouço teórico que deu origem à demonstração de Appel-Haken:

i. conjuntos inevitáveis (*unavoidable sets*): um conjunto que contenha todos as configurações de vértice com grau menor que 6. Dado o fato (**a**), isto é, que todos os grafos planares tem ao menos um vértice com grau menor que 6, todo grafo planar tem uma intersecção não vazia com esse conjunto - daí sua inevitabilidade.
ii. Contraexemplo mínimo (*minimal counterexample/minimal criminal*): se houvesse contraexemplos à conjectura, grafos não 4-coloríveis existiriam. Entre eles, ao menos um com um número mínimo de vértices.
iii. Configuração redutível (*reducible configuration*): uma configuração de vértices tal que não poderia existir em um contraexemplo mínimo. Walters exemplifica com vértices com grau até 4, os quais a demonstração de Kempe demonstrou efetivamente serem 4-coloríveis. Se um grafo tem uma configuração redutível, ela pode ser estendida para coloração do restante do grafo, fazendo-o 4-colorível (WALTERS, 2004, p.7).

De modo geral, ignorando uma série de avanços particulares em diversas direções, a partir de então, a busca pela demonstração consistiu na busca por conjuntos inevitáveis de configurações redutíveis. Se fosse provado que esses conjuntos inevitáveis existiam, levando em conta que apenas

[11] O artigo de Heawood não era inteiramente destrutivo: tinha provado, a partir dos métodos de Kempe, a 5-coloricidade dos grafos planares. (WALTERS, 2004, p.6)

os grafos cujo menor grau de vértice era 5 deveriam ser considerados (o único caso para qual a demonstração de Kempe falhava) então o problema estaria liquidado.

Para isso, um número gigantesco de configurações deveria ser analisado. Definimos a complexidade de uma configuração pelo seu tamanho de anel (*ring size*), isto é, o número de vértices que lhe encapsula. Conforme a complexidade aumenta, aumenta também o número de casos possíveis a serem checados. Em um primeiro momento, esse número era tão grande - considerando que o que deveria ser testado, pelo andamento da demonstração até então, eram configurações cujo tamanho do anel era 16 -, que, mesmo para os supercomputadores da época, a tarefa era impossível. Isso porque o número de casos que deveriam ser checados cresce exponencialmente em relação ao tamanho do anel e, por isso, rapidamente excedia o poder computacional disponível.

O cenário mudou quando Haken conseguiu reduzir a complexidade do que deveria ser analisado para 14, diminuindo o número de configurações a serem checadas para 199.291. O número ainda era proibitivo para um ser humano mas, agora, factível para um supercomputador. Após a implementação de um algorítimo que verificava esses casos, depois de aproximadamente 1.200 horas de computação, o teste chegou ao fim e a demonstração foi estabelecida.

Por enquanto, resta colocar que o resultado não pôs fim ao trabalho em cima do problema, como frequentemente acontece na matemática. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, conta com centenas de demonstrações. Trabalho matemático tradicional (isto é, humano) foi feito para otimizar o número de casos a serem checados. Eliminando redundâncias e partes desnecessárias, o número foi reduzido, em 1996, a 633, por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas, segundo Walters (2004, p.11). Com isso, esses autores propuseram uma demonstração independente, baseada em métodos matemáticos análogos - atualmente a mais eficiente. Por fim, Gonthier e sua equipe, na Microsoft Research, em Cambridge, publicaram recentemente uma demonstração inteiramente formalizada através de um assistente de demonstração computadorizado, o Coq (GONTHIER, 2015).

3.2 Objeções, descontentamentos

Embora, de modo geral, a demonstração tenha sido aceita desde sua publicação, o resultado não gozou de unanimidade. Matemáticos e filósofos se opuseram a ela por diversas razões. Por vezes, sugerindo que não se tratava de uma prova; por vezes, que não era uma demonstração válida; e, ainda, que, dada sua provável correção e validade, se quiséssemos aceitar a verdade de sua conclusão deveríamos transformar a própria noção de prova. Alguns, como o filósofo da matemática Thomas Tymoczko, sugeriram que a demonstração de Appel e Haken transformava nossa definição de conhecimento matemático. Argumentamos aqui que a demonstração não é distinta o suficiente para propor uma reformulação no escopo do conceito (de demonstração), mas que a reação que ela provoca suscita a reflexão sobre questões da filosofia da matemática que preexistiam e agora se tornam mais evidentes.

Se nos atentarmos ao raciocínio proposto para a demonstração de Appel e Haken, veremos que ele se assemelha bastante a uma demonstração tradicional; inclusive, porque foi construído a partir de resultados e técnicas desenvolvidos em tempos analógicos. Portanto, uma objeção total, do tipo que a recuse porque ela é "apenas" um experimento, é descabida. A raiz do desconforto está na última etapa, que, se adotarmos a terminologia de Tymoczko, pode ser caracterizada enquanto "lema"; isto é, uma proposição acessória que deve ser demonstrada para que a demonstração se complete. O lema em questão é a verificação de que, para grafos com vértices mínimos de grau 5, as configurações do conjunto inevitável são redutíveis, de onde segue-se o resultado geral. Mas, então, o que é inaceitável?

Elencamos dois candidatos principais a objetores. O primeiro grupo dirá que a demonstração de T4C não preenche todos os requisitos de uma demonstração (ou que esses requisitos devem ser, eles mesmos, reformulados) porque seus passos lógicos não são inspecionáveis (ao menos por um ser humano), o que é uma propriedade essencial das demonstrações matemáticas. Já o segundo grupo afirma que o problema com a demonstração é que ela (i) não é *a priori* e (ii) pode ser dita empírica – contrariando a ideia que fazemos do conhecimento matemático.

Tymoczko (1998, p.247) fundamenta a ideia de demonstração em três conceitos. Segundo ele, as demonstrações devem ser (i) convincentes, (ii) inspecionáveis (*surveyable*) e (iii) formalizáveis – o que é importante, porque sabemos que a maioria das demonstrações nunca é completamente formalizada, mas sabemos que poderíamos fazê-lo, se quiséssemos. O aspecto (ii) ilustra uma "democratização" ao conhecimento matemático; isto é, muitas demonstrações só podem ser concebidas por gênios matemáticos, no entanto, após comunicada de modo claro, qualquer um com instrução matemática adequada pode seguir seus passos.

Um testemunho favorável a essa ideia é a inserção de demonstrações engenhosas em livros didáticos: com os instrumentos adequados à mão, um aluno diligente pode refazer seus passos principais. Mas a afirmação nem sempre é válida. Como nos lembra Thurston (1994), há muito de pressuposto em todas as subáreas da matemática, de modo que mesmo profissionais do ramo podem ter dificuldades na compreensão da demonstração de um teorema. Thurston defende, então, um esforço direcionado de comunicação e ensino que possibilite à comunidade a construção de um *background* de conhecimentos compartilhados.

De todo modo, Tymoczko (1998, p.255) argumenta que não acompanhamos e provavelmente nunca poderemos acompanhar o que efetivamente acontece na análise combinatória que o computador realizou na demonstração de Appel e Haken. Se não por outro motivo, pela sua dimensão: na primeira versão da prova, o computador realizou aproximadamente 500.000 operações lógicas (WALTERS, 2004, p.10). Não haveria tempo hábil para que um ser humano inspecionasse cada um desses pequenos passos – mas, parece-nos, é justamente por isso que um computador deve ser empregado.

Dessa argumentação surge o argumento do Oráculo/marciano Simon, que é discutido em detalhes no artigo de Tymoczko, mas já havia sido elencado antes, de forma análoga, por outros autores. Hersh atribui a Halmos o seguinte comentário: “(…) The present proof relies in effect on an Oracle, and I say down with Oracles! They are not mathematics” (HALMOS apud HERSH, 1997, p 54). Em seu artigo, Tymoczko cria uma história para expressar a ideia. Ele nos pede para imaginar uma sociedade extraterrestre de marcianos que desenvolvem sua matemática normalmente, até que emerge entre eles um ser muito superior, Simon, que revoluciona o campo. Com o tempo, Simon não justifica mais suas afirmações, especialmente aquelas com caráter combinatório, afirmando que os marcianos não poderiam entendê-las ou que uma explicação levaria muito tempo. Dado que há um vínculo de confiança entre Simon e a comunidade, ela passa a aceitar essas afirmações não verificadas (ou inverificáveis), indicando-as pelo rótulo "*Simon says*". Tymoczsko sugere que isso ultrapassa o escopo da matemática marciana, ao menos em sentido estrito – e que a situação é análoga àquela dos processos computacionais. Sugere, enfim, que há algo de fundamentalmente diferente no apelo, no interior de uma prova, a outras demonstrações e ideias desenvolvidas em outros lugares e no apelo a um computador para resolver processos combinatórios.

Claramente, esse processo não é inspecionável, já que não temos ideia dos mecanismos pelos quais as divindades inspiram os oráculos ou aqueles que regem a mente brilhante de Simon. O que nos leva à segunda objeção: a de que a demonstração de Appel-Haken faz apela para conhecimentos empíricos. Conhecimentos físicos sobre o funcionamento de circuitos elétricos e o comportamento de computadores. Só podemos depositar nossa confiança na demonstração porque sabemos como um computador funciona, mas isto não está dado de antemão.

No entanto, se aceitamos o argumento de Tymoczko, deveríamos restringir nossa definição de conhecimento a priori de tal modo que nada mais passaria pelo crivo. Se alguém opera símbolos em um papel, pode-se afirmar, está imbuído de algumas crenças sobre o mundo físico que, caso não se confirmassem, inviabilizariam sua empreitada. Se não houvesse estabilidade, por exemplo, e a tinta ganhasse outras formas logo que tocasse a folha, não poderíamos realizar os cálculos da forma habitual. Mesmo nos casos extremos onde um cálculo – ou, como na demonstração do T4C, uma checagem de casos – pode ser feito "de cabeça", confiamos em um conhecimento tácito sobre o funcionamento do aparato cognitivo, senão humano em geral, ao menos de nós mesmos. Além do que, trabalhos recentes das ciências cognitivas têm indicado que, mesmo quando contamos na mente, os processos cognitivos que ocorrem são semelhantes à manipulação simbólica que é feita no mundo físico (NOVAES, 2013).

É claro que o conhecimento envolvido na construção e operação de um computador é mais sofisticado do que o tipo de *folk psychology* em que nos aferramos para validar nossos raciocínios matemáticos. Mas isso não significa que um seja empírico e o outro, a priori. Ambos são empíricos e, parece-nos, necessários para a matemática. A diferença não é de espécie, mas de grau.

Quanto à inspecionabilidade, devemos encará-la de modo mais aprofundado. No corpo de conhecimento matemático há uma série de demonstrações de naturezas muito distintas. Mesmo entre aquelas feitas por humanos, há algumas cujo tamanho torna a tarefa inviável para uma (ou mesmo algumas) pessoas. Citamos, por exemplo, a demonstração da classificação finita dos grupos simples, que está espalhada em dezenas de artigos e totaliza mais de 15.000 páginas de material escrito. Além disso, não há garantia de sucesso na inspeção. Se contrapomos a capacidade humana à do computador, será aparente a vantagem do segundo em relação a nós – visto que ele opera centenas de operações por segundo, não se cansa, não se desconcentra etc. Logo, a falibilidade não pode servir de argumento aqui.

Se queremos garantir que uma demonstração computadorizada é válida, devemos adotar algumas preocupações técnicas e metodológicas, da mesma forma que estratégias que minimizam a proliferação de erros são adotadas na inspeção humana de demonstrações. Por exemplo, para minimizar a probabilidade de um erro aleatório deturpar o resultado, empregam-se vários computadores para o mesmo teste, de modo que um erro dificilmente se repetiria no mesmo lugar uma série de vezes. Ainda além, algorítimos podem ser construídos para o mesmo teste, usando procedimentos diferentes. No caso do T4C, o método de *discharging* que o computador emprega para verificar as configurações foi implementado de mais de uma maneira e a demonstração foi implementada de mais de uma forma.

Por último, há ainda outra maneira de verificação, que é a checagem do algorítimo computacional escrito para checar os casos. Evidentemente o código fica disponível à comunidade – interpessoal, portanto – que pode verificar o tipo de operação que o computador fará. Uma das últimas formulações da demonstração, de Gonthier (2015), que usa o assistente de demonstração Coq, tem a funcionalidade de produzir um suplemento com todos os passos lógicos que foram tomados na produção do resultado. Se se quiser argumentar, ainda assim, afirmando que a extensão torna a inspeção impossível, deveremos recusar também as demonstrações humanas muito grandes, como a supracitada demonstração da classificação finita dos grupos simples. Isso enfraquece a noção de que o processo computacional é intrinsecamente distinto do humano.

4.

Mas, afinal, há algo de errado com a demonstração? Aqui, a melhor resposta segue um caminho intermediário. Do ponto de vista clássico, há uma proposição cuja verdade é justificada por uma série de passos que compõe uma demonstração formal. Essa proposição constitui, assim, um teorema, e é incorporada ao conhecimento matemático. Nesse sentido, o T4C mereceria menos atenção do que lhe foi dado.

Por outro lado, ao compararmos com outros resultados, falta algo à demonstração de T4C, o que está de acordo com a expressão de descontentamento de matemáticos e o olhar curioso dos filósofos da matemática na época de seu estabelecimento. Essa parte faltante é justamente o que não é capturado pela teoria clássica da matemática e que foi tangenciado por seus críticos mencionados na segunda seção. Um conceito chave para entender a reação inicial negativa é o já mencionado entendimento.

Paul Hoffman, o biógrafo de Paul Erdos, nos conta que o mais prolífico dos matemáticos expressou a seguinte opinião: “I'm not an expert on the four-color problem, but I assume that the proof is true. However, it's not beautiful. <u>I'd prefer to see a proof that gives insight into why four colors are sufficient.</u>” (HOFFMAN, ano, p.43). Assim como a demonstração do somatório, ou a demonstração euclidiana do Teorema de Pitágoras[12], os matemáticos buscam demonstrações que elucidem algum mecanismo compreensível que justifique a conclusão de forma relevante. O que Erdos buscava na demonstração de T4C não era apenas a solução de um dilema - afinal, é ou não possível colorir qualquer mapa de territórios contíguos usando apenas qua-

[12] Ver PÓLYA, 1954, p. 15-16.

tro cores? -, mas uma solução que fornecesse um *insight* sobre a razão deste fato. Em suma, uma razão que tivesse aspectos cognitivos explicativos.

O problema não é tanto a existência, como argumenta Tymokczo, de uma matemática de natureza inteiramente diferente, ainda que considerar a existência de algo como *estilos* dentro da matemática seja uma proposta interessante, mas a carência cognitiva da (última etapa da) demonstração. A confusão causada pelo T4C é parcialmente motivada pela inadequação da concepção clássica da natureza da matemática. Essa concepção é extrapolada ao se deparar com casos-limite, como é o T4C.

Por outro lado, as noções intrínsecas de entendimento, como as defendidas por Steiner, são insuficientes para dar conta da novidade que surge com esta demonstração. As demonstrações por enumeração de casos antecederam T4C. A diferença constitutiva é que, no primeiro caso, elas se adaptam ao aparelho cognitivo dos seres humanos; no segundo, são concebidas com um tipo de supercomputador em mente. Demonstrações por enumeração de caso podem, em princípio, ter um grau adequado de explicabilidade - mas apenas se estiverem dentro do tipo raciocínio que um ser humano é capaz de fazer. A visuabilidade, outro critério discutido, é visuabilidade para humanos.

Essa questão fica evidente no uso especializado que matemáticos fazem das capacidades cognitivas visuais. Gráficos, diagramas e congêneres sempre estiveram presentes no raciocínio matemático, embora o rigor desses raciocínios tenha sido posto em questão ao longo da história. De todo modo, é difícil negar que o tipo de atividade cognitiva humana diverge daquele usualmente atribuído a computadores. Thurston (1994, p.4) chama atenção para a centralidade do aspecto visual na matemática humana. Embora ele seja apenas um praticante da matemática, seu relato é corroborado por cientistas cognitivos que trabalham na intersecção da epistemologia com a ciência da visão. Pylyshyn (2003) destaca a grande sofisticação da cognição visual humana e seu papel central para diversas formas de raciocínio; entre eles, o matemático. De acordo com ele, embora não haja uma teoria que explique de modo satisfatório qual é o papel preciso da cognição visual, é inegável que ela fornece capacidades cognitivas inacessíveis por outros meios. Há pistas de sua natureza em propriedades conhecidas do sistema de cognição espaço-visual, como: (i) capacidades primitivas de identificação de formas e reconhecimento de padrões; (ii) expansão da memória (o sistema visual 'guarda' informação nos objetos que vê); (iii) grande capacidade generalizadora. Todas essas habilidades estão intimamente ligadas à prática matemática.

Em contraste, sabemos que, por enquanto, não é assim que computadores pensam (ou computam). Tomemos, como exemplo, os avanços recentes no campo da inteligência artificial, em especial na área conhecida por visão computacional. Há um progresso espantoso nos sistemas capazes de identificar objetos comuns, como ônibus, gatos e prédios; sistemas cuja correção muitas vezes é comparável à de um ser humano. Para outras tarefas, como detectar anomalias em radiografias ou em imagens de satélite, a precisão é ainda maior do que a de humanos treinados. No entanto, ainda que estejam desempenhando rigorosamente a mesma função - isto é, classificar objetos em imagens estáticas ou em vídeos - o meio pelo que fazem isso é inteiramente diferente. Isso fica evidente, por exemplo, nos erros que podem ser cometidos. Há uma anedota que ilustra bem essa distinção: um sistema que foi treinado para distinguir cachorros de lobos apresentada resultados excepcionais. Esse sistema passou a apresentar defeitos ao ser confrontado com imagens de cachorros onde o fundo era branco - porque, sem saber o que diferenciar nas fotos, a classificação era feita levando em conta a paisagem. A maioria dos lobos estava sobre um cenário nevado. (RIBEIRO; SINGH; GUESTRIN, 2016)

Esse exemplo reforça a tese de que o entendimento é indissociável daquele que entende - seja ele uma máquina, um ser humano ou um oráculo de Marte. Dessa forma, ainda que uma operação - uma demonstração, por exemplo - pode ser feita tanto por seres humanos e por computadores, isso não implica que cada uma delas seja igual a outra. Há um conteúdo que está impregnado em *como* essa operação é feita. Contra a tese clássica, entendemos que esse conteúdo é parte constitutiva do conhecimento matemático. O estudo de demonstrações é parte da educação matemática e uma demonstração valiosa traz em si muito mais do que sua conclusão imediata, isto é, seu enunciado.

Casos como T4C apontam para a necessidade de uma reformulação ou extensão da concepção clássica de demonstração e, de modo amplo, do que caracteriza a matemática enquanto ciência. A noção clássica, ao não incluir aspectos como entendimento, incorre em uma sub-caracterização. Por outro lado, propostas teóricas que buscaram essas características nas próprias demonstrações estão fadadas à insuficiência, porque conceitos como o de entendimento, visualização e mesmo elegância não são separáveis dos indivíduos que fazem a matemática. Assim, além da necessidade de reformar a teoria clássica, é preciso fazê-lo de uma forma que leve em conta também a face humana da disciplina.

Como corolário, essa conclusão abre espaço para novas considerações. Se, como defendido, o conhecimento matemático deve ser examinado nos seus aspectos que consideram, de maneira mais imediata, os indivíduos que o constroem, então há espaço para outros tipos de matemática. Além da matemática humana, há a matemática dos computadores, taxonomia que já existe ocorre na prática, sob a alcunha de matemática experimental - nesse sentido, como nota Secco (2016, p.117), o T4C inaugura um novo ramo da matemática. Mas seria possível ir além, vinculando-se a projetos de classificação de *estilos* de raciocínio científico (BUENO, 2012). Mesmo na matemática humana, é possível que haja diferentes estilos e que sua análise elucide características ignoradas desta ciência.

Uma objeção possível é a de que essas teses representam um abandono indesejado e improdutivo da distinção entre os contextos da descoberta e da justificativa. Isto é, de que o processo pelo qual os cientistas alcanças suas conclusões não interessa à metodologia da ciência, apenas a sua história e sociologia; e que o objeto de interesse da metodologia seja tão somente o procedimento pelo qual essas conclusões são fundamentadas e justificadas. Esse não é o caso, embora, em alguns momentos, a distinção possa ter sido deslocada ou borrada. A tese proposta é de que há uma parcela do fazer matemático, antes negligenciada, que é, ela mesma, parte constitutiva da matemática. Essas qualidades ignoradas, ao serem consideradas no contexto da justificativa, sugerem a uma reformulação de alguns dos conceitos fundamentais que estruturavam esse próprio contexto no âmbito da chamada teoria clássica.

Conclusão

O presente artigo procurou expor limitações de uma visão sobre o conhecimento matemático - chamada aqui de "teoria clássica" - bem como a de algumas tentativas embrionárias de sanar algumas das dificuldades suscitadas por ele. Para isso, após uma exposição panorâmica dessas visões, considerou-se a célebre demonstração do Teorema das Quatro Cores (T4C). De acordo com o argumento proposto, a discussão que acompanhou a demonstração salienta que há determinadas insuficiências tanto na definição do que constitui uma demonstração, quanto na natureza do conhecimento matemático.

De modo geral, considera-se necessário elaborar os conceitos de entendimento, *insight*, visuabilidade, entre outros, considerando-os não apenas em relação às demonstrações e teoremas, mas também fazendo referência aos indivíduos que se ocupam da matemática. A ausência dessas categorias se torna evidente nas queixas da pouca informatividade, usando o termo informalmente, do teorema - isto é, por mais que ele se baseie em técnicas matemáticas bem estabelecidas, diz pouco sobre a razão de suas conclusões. Isso é tomado como evidência para que essa explicatividade seja incluída no que se entende por conhecimento matemático.

Por último, um tema apenas sugerido é que a abordagem defendida abre espaço para que se pense em matemáticas a partir de diferentes pontos de vista cognitivos. Um caso paradigmático seria a ciência enquanto realizada por indivíduos (ou objetos) com aparatos cognitivos particulares, como os humanos e computadores.

Referências Bibliográficas

AVIGAD, Jeremy. Computers in Mathematical Inquiry. In: MANCOSU, Paolo (Ed.). *The Philosophy of Mathematical Practice.* Oxford: Oxford University Press, 2008.

AVIGAD, Jeremy. Understanding Proofs In: MANCOSU, Paolo (Ed.). *The Philosophy of Mathematical Practice.* Oxford: Oxford University Press, 2008.

BRAVACO, Ralph; SIMONSON, Shai. *Data Structures and Discrete Mathematics Learning Community:* Lab. 3. Disponível em:

<http://web.stonehill.edu/compsci/lc/four-color/four-color.htm>. Acesso em: 20 set. 2015.

BUENO, Otávio. Styles of reasoning: a pluralist view. *Studies In History And Philosophy Of Science Part A*, [s.l.], v. 43, n. 4, p. 657-665, dez. 2012.

GIAQUINTO, Marcus. Visualizing in Mathematics in: MANCOSU, Paolo (Ed.). *The Philosophy of Mathematical Practice.* Oxford: Oxford Univeristy Press, 2008.

GONTHIER, Georges. *A computer-checked proof of the Four Color Theorem.* Microsoft Research Cambridge. Disponível em: <http://research.microsoft.com/en-US/people/gonthier/4colproof.pdf>. Acesso em: 16 set. 2015.

HARDY, G. H. *Em Defesa de um Matemático*. São Paulo: Martins Fontes. 2000.

HERSH, Reuben. *What is Mathematics, Really?.* Oxford: Oxford Univeristy Press, 1997.

KRIPKE, Saul A. *Naming and necessity*. Malden: Blackwell, 1972.

LAKATOS, Imre; WORRAL, John (Ed.); ZAHAR, Elie (Ed.). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

MANCOSU, Paolo, Explanation in Mathematics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/mathematics-explanation/>.

MANCOSU, Paolo (Ed.). Mathematical Explanation: Why it Matters. In: MANCOSU, Paolo. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford Univeristy Press, 2008.

NOVAES, Catarina Dutilh. Mathematical Reasoning and External Symbolic Systems. *Logique & Analyse*. v. 221, p. 45-65, 2013.

PÓLYA, Georg. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1954.

PYLYSHYN, Zenon. *Seeing and Visualizing: it's not what you think*. Cambridge (ma): MIT Press, 2003.

SECCO, Gisele Dalva. Computadores nas práticas matemáticas: um exercício de micro história. *O Que nos Faz Pensar*, Rio de Janeiro, v. 39, n. 25, p. 105-122, jul. 2016.

SECCO, Gisele Dalva. Proofs Versus Experiments: wittgensteinian themes surrounding the four-color theorem. In: SILVA, Marcos (ed.). *How colours matter to Philosophy*. Cham: Springer, 2017.

STEINER, M., Mathematical Explanation. *Philosophical Studies*, v. 34, pp. 135–151, 1978.

SWART, E. R. The Philosophical Implications of the Four-Color Problem. *The American Mathematical Monthly*. v. 11, pp. 697-707, 1980.

THURSTON, William P. On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of The American Mathematical Society*, v. 2, n. 30, p.161-177, abr. 1994.

TYMOCZKO, Thomas. The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance. In: TYMOCZKO, Thomas. *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press, 1998.

LAUDAN, Larry. A confutation of convergent realism. *Philosophy of Science*. Chicago, v.48, n.1, p.19-49, mar. 1981.

WALTERS, Mark. *It Appears That Four Colors Suffice: A Historical Overview of the Four-Color Theorem.* New York: MAA, 2004.

WILSON, Robin; STEWART, Ian. *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved.* Princeton, Nj: Princeton University Press, 2013.