

**A QUESTÃO DA IDENTIDADE DE PROVAS,
A TESE DA NORMALIZAÇÃO
E ALGUNS DE SEUS PRESSUPOSTOS SEMÂNTICOS BÁSICOS**

Tiago de Castro Alves¹

RESUMO

O artigo oferece, em primeiro lugar, uma caracterização da questão da identidade de provas como um problema concernente à semântica de argumentos dedutivos, pertinente à lógica e à filosofia da linguagem. Em seguida, é dada uma descrição dos principais aspectos formais e conceituais daquela que é provavelmente a proposta de abordagem formal dessa questão mais bem desenvolvida na literatura: a chamada *tese da normalização*, proposta em caráter conjectural em Prawitz 1971. Finalmente, alguns dos pressupostos semânticos que alicerçam a formulação dessa tese – componentes importantes da concepção *representacionista* de provas que ela instancia – são expostos e discutidos quanto a suas possíveis motivações e consequências relevantes. Para além dos objetivos atinentes ao seu teor, este tem a meta pedagógica de tornar acessível e fomentar a consideração da questão da identidade de provas no seio da comunidade filosófica de língua portuguesa.

Palavras-chave: Identidade de provas. Semântica. Argumentos dedutivos. Derivações. Normalização.

ABSTRACT

The article offers, first, a characterisation of the question of identity of proofs as a problem concerning the semantics of deductive arguments, pertaining to logic and philosophy of language. In the sequel, a description of the main formal and conceptual aspects of the *normalisation thesis* – probably the most well developed formal approach to identity of proofs in the literature so far, proposed as a conjecture by Prawitz in 1971 – is given. Finally, some of the semantical assumptions that form the basis of the thesis' formulation – important components of the *representationalist* view of proofs which it instantiates – are exposed and discussed as to its relevant consequences and possible motivations. Apart from the goals directly related to its contents, the article has the pedagogical aim of facilitating and stimulating the consideration

¹ Professor de Filosofia do Departamento de Filosofia da UFMT.
E-mail: tiagorca@hotmail.com. ORCID: [0000-0002-5786-5561](https://orcid.org/0000-0002-5786-5561).

of the question of identity of proofs amongst the portuguese-speaking philosophical community.

Keywords: Identity of proofs. Semantics. Deductive arguments. Derivations. Normalisation.

Introdução: a semântica de argumentos dedutivos

Desde o advento da lógica de Port-Royal de Arnauld e Nicole, ainda no século XVII, e até a chamada “revolução” lógica do século XIX – ainda tão carente de uma historicização apropriada –, foi padrão a prática de dividir os tradicionais manuais de Lógica, então dedicados sobretudo à silogística aristotélica, em três partes ou “livros”, cada um dedicado a um objeto diferente da tradicional “doutrina dos elementos”; respectivamente: dos conceitos; dos juízos; e, finalmente, das inferências. O famoso manual de Lógica de Kant, editado por G.B. Jäsche – traduzido na íntegra para o português² – é um exemplo. Esse fato é relativamente bem difundido entre estudantes de filosofia.

Também é relativamente comum que, ao longo de sua formação, estudantes de filosofia sejam no mínimo postos a par da existência de um volume vultoso de literatura – produzida sobretudo após a mencionada “revolução” por autores da filosofia da linguagem de orientação “analítica” –, dedicada ao tratamento da semântica daquilo que folcloricamente, por assim dizer, é compreendido como contraparte, no léxico contemporâneo, dos dois primeiros elementos mencionados da lógica tradicional dos modernos: primeiramente, nomes, termos, etc. – contrapartes contemporâneas dos *conceitos*; e posteriormente, proposições, sentenças, etc. – contrapartes contemporâneas dos *juízos*.

É precisamente o conjunto dessas observações que enseja estranheza na recepção do fato de que as contrapartes contemporâneas do terceiro elemento – derivações, deduções, etc., contrapartes das *inferências* – careçam quase que em absoluto de abordagens semânticas semelhantes da literatura filosófica contemporânea. Não obstante, essa escassez não é um fenômeno to-

² I. Kant, *Lógica*. Trad. por Guido Antônio de Almeida. (Série Estudos Alemães, 93). 2ª ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1992.

talmente misterioso de um ponto de vista histórico-conceitual: suas razões são em larga medida explicáveis em termos dos propósitos e orientações filosóficas formalistas dos desenvolvimentos ligados à *Beweistheorie* do programa fundacional hilbertiano, em muito responsáveis pelos contornos metamatemáticos com que se desenvolveram e legaram as noções contemporâneas “paralelas” à da inferência moderna. O estudo do teor dessa história, contudo, não será objeto das presentes considerações. Mostraremos, antes, um caminho atualmente aberto para o tratamento atual e futuro desse que ainda é um *desideratum*³ no catálogo temático da filosofia da linguagem contemporânea, a saber: a semântica dos argumentos dedutivos. Mais especificamente, o esforço a ser aqui empreendido será o de cumprir as seguintes tarefas: 1. apresentar a chamada questão da “identidade de provas” como um problema filosófico; 2. sob o pano de fundo dessa caracterização do problema, apresentar aquela que considero a sua abordagem formal mais bem desenvolvida até hoje na literatura: a chamada tese da normalização. 3. discutir aspectos notáveis conceituais e matemáticos dessa abordagem do problema, em especial: (a) alguns fatos formais habitualmente usados como argumentos a favor da tese; e (b) a concepção denotacionalista da semântica das derivações que sua formulação original pressupõe.

1. A questão da identidade de provas

Nosso primeiro passo neste esforço será caracterizar *a questão* da identidade de provas, a fim de possibilitar uma apreciação adequada de seu sentido e sua relevância como um problema filosófico. A formulação preliminar a ser instrumentalmente usada como primeiro passo rumo à clareza a respeito dessa questão é a seguinte: Dado que Π é uma prova e que Σ é também uma prova, quando é que dizemos que Π e Σ são *a mesma* prova?

³ Diagnóstico sugerido pelo prof. Peter Schroeder-Heister.

1.1. *O que se prova vs. como se prova*

Uma indagação plausível e relevante que a formulação acima pode suscitar é: por que alguém se perguntaria algo assim?

Há alguns fatos cuja observação suscita ou, no mínimo, enseja esse exato tipo de questão. O prof. Luiz Carlos Pereira costuma pontuar que esse tipo de questão atinge diretamente e de maneira muito concreta a vida prática de pesquisadores e acadêmicos: de fato, decisões a respeito da identidade ou não entre provas oferecidas para um mesmo resultado matemático, por exemplo, são a base para a aceitação ou a rejeição de propostas de publicação de artigos em periódicos. Esse tipo de situação torna flagrante um fato que o condiciona, e cuja observação tem sido provavelmente a porta de entrada efetivamente mais utilizada para o interesse na questão da identidade de provas, a saber: é frequentemente possível provar (viz. oferecer argumentos válidos para) as mesmas coisas de maneiras significativamente diferentes entre si. Por exemplo: posso demonstrar que minha caneta não está na gaveta esquerda da escrivaninha abrindo a gaveta, inspecionando seu conteúdo exaustivamente e verificando que a caneta não é parte dele; ou também simplesmente verificando que a caneta está de fato sobre o tampo da escrivaninha. Isso permite concluir que, a fim de determinar se Π e Σ são a mesma prova, não é suficiente que consideremos apenas *o que* Π e Σ provam – o que é, em muitos contextos, suficientemente evidente –, mas também *como* o fazem. Isso, contudo, não significa que *qualquer* diferença entre duas maneiras de provar uma mesma coisa é significativa; o que evidencia que não é claro que espécie de diferenças entre duas maneiras de se provar uma mesma coisa são ou não relevantes para determinar se se trata de uma mesma prova ou de provas distintas.⁴

⁴ Além disso, é também possível, em princípio, que provas oferecidas para coisas diferentes sejam a tal ponto análogas que a diferença entre aquilo que provam não embargue a identidade entre elas – pode-se facilmente conceber a ideia de um mesmo argumento formal válido aplicado a premissas distintas e levando a conclusões respectivamente distintas, por exemplo. Em outras palavras, é possível em princípio que a identidade entre o que é provado por Π e Σ não seja nem sequer condição necessária para a eventual identidade entre Π e Σ . Neste texto, no entanto, nos concentraremos em considerações sobre identidade de provas levadas a cabo a partir da pressuposição de que a identidade entre o que é provado por Π e Σ é condição necessária para a identidade entre Π e Σ .

Em suma: carecemos de clareza a respeito de critérios segundo os quais identificar ou diferenciar provas/argumentos válidos oferecidos para uma mesma coisa. Em consonância com a literatura que consideraremos na sequência, utilizaremos essa observação como motivação para a investigação do problema da identidade de provas neste esforço, a saber: a identidade entre provas de uma mesma coisa não é trivialmente garantida pelo mero fato de serem provas de uma mesma coisa. Isto é: a eventual identidade entre *o que é provado* por, respectivamente, Π e Σ , não é entendido como *condição suficiente* para a eventual identidade entre Π e Σ . A esse respeito, Kosta Došen 2003 coloca:

Para que toda a área da teoria geral da prova [*general proof theory*] faça sentido, e em particular para a consideração da questão de critérios de identidade para provas, não devemos admitir que quaisquer duas derivações com as mesmas hipóteses e conclusão sejam equivalentes; isto é, não deve ser o caso que nunca haja mais que uma prova com dadas hipóteses e uma dada conclusão. Não fosse assim, nossa área seria trivial. Isso é o divisor de águas entre a teoria da prova e o resto da lógica, em que não se ocupa de provas, mas, no máximo, de relações de consequência.⁵ (DOŠEN, 2003, p.14)

Esse tipo de observação confere legitimidade e relevância à questão da identidade de provas na medida em que a torna irreduzível à questão a respeito da identidade entre aquilo que as provas provam.

1.2. Provas: *τί ἐστίν*

Os mais variados tipos de coisas têm sido designados pelo rótulo “provas”: provas de amor (ex.: o Taj Mahal), provas de inocência criminal (ex.: um alibi), provas de teoremas (ex.: a prova de Euclides da infinitude dos primos) – isso para não mencionar casos aparentemente mais distantes de nossos presentes interesses, como provas gastronômicas ou provas escolares trimestrais

⁵ No original: “For the whole field of general proof theory to make sense, and in particular for considering the question of identity criteria for proofs, we should not have that any two derivations with the same assumptions and conclusion are equivalent, i.e. it should not be the case that there is never more than one proof with given assumptions and a given conclusion. Otherwise, our field would be trivial. This marks the watershed between proof theory and the rest of logic, where one is not concerned with proofs, but at most with consequence relations.” Tradução livre do autor.

de matemática. Provas aqui parecem nos interessar *qua*, grosso modo, *razões suficientes para a admissão daquilo que provam*. Assim, por exemplo: o Taj Mahal é supostamente suficiente como razão para admitirmos o amor de Shah Jahan por Aryumand Banu Begam; um álibi é supostamente suficiente para admitirmos a inocência do réu, por exemplo; a argumentação de Euclides é supostamente suficiente para admitirmos a infinitude dos primos; etc.

Na literatura considerada neste esforço, o escopo de coisas compreendidas sob esse rótulo diminui consideravelmente – em geral, limita-se a consideração aos casos de provas que podem ser expressas, levadas a cabo ou representadas por meio de derivações formais. Não obstante, é precisamente no seio dessa literatura que discussões com vistas à delimitação mais precisa do assunto em questão fazem com que se multipliquem as categorias lógico-ontológicas sob as quais são entendidas as coisas que tratamos por provas: normas, atos, objetos, etc. Assim, parece impor-se à investigação da identidade de provas uma tarefa preliminar, a saber: determinarmos o que uma prova é. Somente assim, presumivelmente, será possível que tenhamos um parâmetro para julgar a adequação de um critério de identidade proposto – para diferentes coisas, diferentes critérios seriam ou não respectivamente cabíveis.

Por outro lado, é frequente nessa mesma literatura a manifestação da ideia de que uma resposta adequada à questão da identidade de provas é ela própria central para a compreensão adequada de o que uma prova é. Diante disso, parece sugerir-se a possibilidade de que estejamos condenados a perseguir a própria cauda nessa empreitada: pois, por um lado, a resposta à pergunta “o que é uma prova?” dependeria de uma resposta adequada à questão da identidade de provas; e, por outro, o julgamento da adequação de uma resposta à questão da identidade de provas dependeria de termos clareza prévia a respeito do que estamos tratando por provas. Como sair desse círculo?

Uma forma de dissolver – ou, no mínimo, contornar – esse aparente problema é atentar para o fato de que a clareza que temos que ter de antemão a respeito do que provas são a fim de julgar propostas de critérios de identidade de provas não é o mesmo tipo de clareza sobre provas cuja obtenção presumivelmente depende de uma boa resposta à questão da identidade de provas.

A fim de compreender melhor essa colocação, podemos primeiramente oferecer uma resposta adequada à seguinte questão, que talvez já tenha se insinuado: por que é que alguém julgaria que compreender o que uma prova é depende em algum sentido de uma resposta à questão da identidade de provas?

Uma breve explicação para isso pode ser dada com recurso ao *slogan* Quineano “*no entity without identity*”. Em um breve texto sobre o conceito de identidade⁶, Sundholm chama a atenção para o seguinte:

Considere os dois tipos $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ de pares ordenados de inteiros positivos e \mathbb{Q}^+ de racionais positivos. Formalmente, eles têm o mesmo critério de aplicação:

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle : \alpha}$$

$\langle 2, 3 \rangle$ e $\langle 4, 6 \rangle$ são elementos iguais do tipo \mathbb{Q}^+ , mas não do tipo $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$. A fim de individuar os tipos em questão, diferentes critérios de identidade são necessários: o tipo $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ é individuado pelo critério de identidade

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+ \quad r:\mathbb{N}^+ \quad s:\mathbb{N}^+ \quad p=r:\mathbb{N}^+ \quad q=s:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle : \mathbb{N}^+}$$

e o tipo \mathbb{Q}^+ pelo critério

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+ \quad r:\mathbb{N}^+ \quad s:\mathbb{N}^+ \quad p \times s = q \times r:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle : \mathbb{Q}^+} \quad ,$$

⁶ Sundholm, G.B. (1999) Identity: Propositional, criterial, Absolute, in The Logica 1998 Yearbook, Filosofia Publishers, Czech Academy of Science, Prague, pp. 20–26.

⁷ No original: “Consider the two types $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ of ordered pairs of positive integers and \mathbb{Q}^+ of positive rationals. Formally they have the same application criterion:

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle : \alpha}$$

$\langle 2, 3 \rangle$ and $\langle 4, 6 \rangle$ are equal elements of type \mathbb{Q}^+ , but not of the type $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$. In order to individuate the types in question different criteria of identity are needed: the type $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ is individuated by the identity criterion

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+ \quad r:\mathbb{N}^+ \quad s:\mathbb{N}^+ \quad p=r:\mathbb{N}^+ \quad q=s:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle : \mathbb{N}^+}$$

and the type \mathbb{Q}^+ by the criterion

(SUNDHOLM, 2009, p.20–21)

Uma observação análoga poderia ser aplicada ao presente contexto de discussão de provas: temos uma miríade de possíveis critérios de aplicação, dos quais, seguindo a já mencionada orientação da literatura, selecionamos, digamos, “levadas a cabo ou representadas por meio de derivações formais”. Isso, evidentemente, responde *algo* a respeito de o que é uma prova; mas não tudo. De fato, a partir de uma resposta como essa – i.e., um critério de aplicação –, uma noção distinta e particular de prova (como um tipo) só pode ser dada pela associação a ela de um critério de identidade específico; para diferentes critérios de identidade, noções respectivamente diferentes de prova resultariam. Note-se que um critério de identidade é necessário não apenas para determinar a identidade das provas individuais “dentro” do tipo, mas também a identidade *do próprio tipo* em questão. É nesse sentido que Martin-Löf, segundo Sundholm, sugere a combinação das máximas de teoria dos tipos “*no entity without type*” e “*no type without identity*” como uma maneira fácil de reconstruir o *slogan* quineano “*no entity without identity*”. Pode-se entender as alegações de que uma resposta à questão da identidade de provas é essencial para a compreensão do que é uma prova no espírito desse tipo de reflexão. Por tabela, pode-se também compreender a partir disso uma saída para o círculo epistêmico caracterizado anteriormente: a clareza a respeito da noção de prova pressuposta para que se julgue a adequação de um critério de identidade não está condicionada pela aceitação prévia de um critério de identidade⁸; e a clareza a respeito de o que é uma prova obtida pela aceitação de um critério de identidade, ainda que condicionada pelo estabelecimento prévio de um critério de aplicação, é de natureza distinta, mais específica e informativa.

$$\frac{p:\mathbb{N}^+ \quad q:\mathbb{N}^+ \quad r:\mathbb{N}^+ \quad s:\mathbb{N}^+ \quad p \times s = q \times r:\mathbb{N}^+}{\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle:\mathbb{Q}^+} \quad \text{” Tradução livre do autor.}$$

⁸ Apesar de, como veremos adiante, essa clareza – i.e. o estabelecimento de um critério de aplicação – não ser suficiente como fundamento para uma escolha entre diferentes critérios de identidade a ele adequados.

A presente abordagem da questão da identidade de provas primará pela conexão desta com a tradição filosófica clássica que a precede e condiciona: entender provas (viz. argumentos válidos) como *expressões linguísticas* de forma adequada – na esteira, por exemplo, da compreensão da noção de *silogismo* oferecida por Aristóteles nos *Primeiros Analíticos* (A1, 24b18-22) – e, assim, tratar a questão da identidade de provas como concernente à equivalência semântica viz. *sinonímia* entre elas. Nesse sentido, o presente esforço entende a questão da identidade de provas, em consonância com as ideias transmitidas na introdução acima, como pertencente à *semântica* das expressões linguísticas em questão.⁹

2. A tese da normalização

Ainda que escassamente, de fato, algo de suficientemente profundo, abrangente e preciso *já* foi proposto na literatura contemporânea a respeito da questão da identidade de provas, e tem sido esporadicamente levado adiante desde, no mínimo, o início dos anos 70 do século XX. Essas contribuições, contudo, permanecem no olvido ao longo da formação da esmagadora maioria dos estudantes de filosofia – mesmo daqueles mais dedicados a assuntos ligados a lógica e filosofia da linguagem. Tentaremos aqui uma breve reconstrução daquela que julgo ser, por sua solidez filosófica, precisão e influência, o principal exemplo de abordagem de índole formal dessa questão: a chamada *tese da normalização*.

2.1. Alguns traços essenciais da tese da normalização

A formulação “oficial” da tese da normalização é proposta textualmente por Dag Prawitz em 1971 no artigo *Ideas and Results in Proof Theory* (“Ideias e Resultados em Teoria da Prova”, sem tradução para o português), pág.257: “*Two derivations represent the same proof if and only if*

⁹ Em de Castro Alves, 2018, no capítulo I, é oferecida uma defesa da presença desse tipo de abordagem semântica num *locus* clássico da literatura filosófica canônica: o opúsculo *Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren*, de Kant, traduzido para o português por Luciano Codato no volume *Escritos pré-críticos*, publicado pela editora Unesp em 2005.

*they are equivalent*¹⁰(PRAWITZ, 1971, p.257). Apesar da aparente trivialidade com que soa posta desta maneira, essa tese está, em muitos e importantes sentidos, longe de ser um truísmo.

Primeiramente, a noção de equivalência em termos da qual ela é formulada é bastante específica: ela concerne a derivações em dedução natural, e pode ser definida como o fechamento reflexivo, transitivo e simétrico da relação de redutibilidade imediata entre estas. As reduções consideradas são aquelas envolvidas na normalização de derivações; assim, uma derivação se reduz imediatamente a uma outra derivação (cf. PRAWITZ, 1971, Seção II.3.3) quando esta é obtida a partir daquela por meio da remoção de uma *fórmula máxima* (isto é, uma fórmula cujo conectivo principal é * que é a conclusão da aplicação de uma regra de introdução de * e premissa maior da aplicação de uma regra de eliminação de *). Por exemplo, no caso da conjunção, a derivação:

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{A \quad B}}{A \wedge B}}{A} \quad \Pi_3$$

reduz-se imediatamente à derivação:

$$\frac{\Pi_1}{A} \quad \Pi_3$$

Derivações também se reduzem imediatamente por meio de *expansões imediatas*. Estas podem ser operadas sobre fórmulas mínimas de derivações normais e assim, conformá-las ao que Prawitz chama de *forma normal expandida*, em que todas as fórmulas mínimas são atômicas. Por exemplo: seja a seguinte uma derivação normal e $A \wedge B$ uma fórmula mínima nela:

¹⁰ Em tradução livre: “Duas derivações representam a mesma prova se e somente se elas são equivalentes.”

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \wedge B \\ \Pi_2 \end{array}$$

Por meio de uma expansão imediata, ela se deixa reduzir¹¹ imediatamente à derivação abaixo¹²:

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \quad \Pi_1 \\ \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \\ \hline A \wedge B \\ \Pi_2 \end{array}$$

Observe-se *en passant* que há uma certa analogia entre os dois tipos de redução recém-apresentados, a saber: ambas envolvem derivações em que, a partir de uma dada premissa, é inferida uma conclusão que não contribui, por assim dizer, para a obtenção da fórmula final a partir das iniciais. Em alguns casos, como o da conjunção, ocorre, de fato, um *retorno* imediato à referida premissa após a inferência da conclusão do tipo indicado. Assim, no primeiro caso, a derivação de A a partir de Γ a ser reduzida é caracterizada pela introdução e pela eliminação imediatamente subsequente de uma fórmula complexa, que é *removida* por meio da redução sem prejuízo da “boa-formação” da derivação A a partir de Γ . Dualmente, no segundo caso, a derivação reduzida é caracterizada pela eliminação e pela introdução imediatamente

¹¹ Pode causar alguma estranheza dizer que operar *expansões* imediatas sobre uma derivação *a reduz*. Em particular, uma expansão imediata não parece reduzir, mas sim *aumentar* a derivação, no sentido de que insere algo que não estava lá previamente. Em verdade, trata-se de um problema sedimentado na terminologia técnica: para o oposto de expansão, reserva-se o termo *contração*, e não *redução*. No jargão, este último se refere a operações de transformação cuja direção determina ou está em conformidade com a ordem de uma sequência ou cadeia de reduções. Por exemplo: a conversão de "3+2" em "5" é simultaneamente uma contração e uma redução quando se considera o cálculo da soma nos naturais; já a conversão de "18" em "2 x 3²" é simultaneamente uma expansão e uma redução quando se considera o cálculo da fatoração prima dos naturais.

¹² Seria cabível perguntar-se por que a aplicação de expansões imediatas se restringe a esses casos. A razão, com efeito, não tem a ver com identidade de provas, mas, antes, com a *normalização* de derivações – que é, a propósito, a razão pela qual estas reduções foram concebidas. Ao fim e ao cabo, essa restrição sobre as expansões imediatas é precisamente o que permite a obtenção da normalização forte na presença das reduções por meio das quais fórmulas máximas são removidas (sobre essa questão e outras intimamente relacionadas, cf. C.-Jay, N.Ghani, *The virtues of eta-expansion*. J. Functional Programming 5 (2): 135-154, April 1995, Cambridge University Press).

subsequente de uma fórmula complexa, que surge a partir da *inserção* de uma ou mais fórmulas mais simples por meio da redução.¹³

Outras reduções por meio das quais uma derivação se deixa reduzir imediatamente são as chamadas *reduções permutativas*, que concernem às eliminações da disjunção e do quantificador existencial. Por meio delas, é possível remover os *segmentos máximos* (chamados “máximos” por uma razão similar à do caso das fórmulas máximas: trata-se de sequências de ocorrências repetidas de uma mesma dada fórmula, uma imediatamente sob a outra, tais que a primeira é a conclusão de uma aplicação de uma regra de introdução e a última é a premissa maior de uma aplicação de uma regra de eliminação. Note que fórmulas máximas podem ser definidas como um caso específico e limítrofe de segmentos máximos, nos quais apenas uma ocorrência da referida fórmula se dá. Segmentos máximos mais longos podem surgir em virtude de aplicações das regras de eliminação da disjunção e do quantificador existencial (cf. PRAWITZ, 1965, p. 49; e PRAWITZ, 1971, II.3, p.248, 3.1.2). Há ainda as reduções chamadas *simplificações imediatas*, que visam a remoção de eliminações da disjunção em que não há descarte de hipóteses; também há simplificações imediatas que concernem ao quantificador existencial, e também a aplicações ditas “redundantes” da regra do absurdo clássico.

Graças à analogia descoberta entre a dedução natural e o lambda-cálculo tipado, conhecida como correspondência de Curry-Howard – especialmente efetiva no fragmento conjuntivo-implicativo – é possível verificar que a relação de equivalência obtida a partir do sistema de reduções aqui descrito, em termos do qual a tese da normalização é enunciada, corresponde à $\beta\eta$ -equivalência, e à β -equivalência caso as reduções imediatas não sejam incluídas no sistema. Dessa forma, a tese da normalização pode ser formalmente

¹³ Aqui seria também plausível questionar por que a segunda redução, em oposição à primeira, insere, ao invés de remover, uma fórmula dispensável para a obtenção da fórmula final de uma derivação a partir das suas iniciais. A resposta, uma vez mais, não se deve a questão da identidade de provas, mas, antes, à *confluência* do processo de redução. Se invertêssemos a direção das expansões imediatas – isto é, se as usássemos como *contrações*, e não expansões –, então, por exemplo, a unicidade da forma normal de derivações em geral seria perdida na presença das reduções por meio das quais se remove fórmulas máximas. Ainda que isso não afete o caso proposicional, ao qual as observações aqui serão restritas, a tese da normalização é enunciada por Prawitz para a lógica de primeira ordem. Novamente, cf. C.-Jay, N.Ghani, *The virtues of eta-expansion*. J. Functional Programming 5 (2): 135-154, April 1995, Cambridge University Press).

considerada como a cláusula de identidade de uma definição de “prova” como um tipo, cuja ideia central é a de que β - e η -conversões – ou, correspondentemente, a de que as conversões respectivamente associadas às reduções que eliminam fórmulas máximas e às expansões imediatas – são preservadoras de identidade.¹⁴

Deve-se ainda observar que a tese apresenta duas alegações distintas: uma a respeito da *correção*, e outra a respeito da *completude* da relação de equivalência definida em termos das reduções com respeito à relação informal vigente entre derivações que representariam a mesma prova. A cláusula da *correção*, ou a cláusula *se*, diz que a equivalência é *suficiente* para que duas derivações representem a mesma prova, ou, em outras palavras, que a relação formal de equivalência entre derivações é *correta* com respeito à relação informal entre derivações que representariam a mesma prova. A cláusula da *completude*, ou a cláusula *somente se* da tese, por sua vez, diz que a equivalência é *necessária* para que duas derivações representem a mesma prova, isto é, que não há derivações não equivalentes entre si que representem a mesma prova, ou ainda, em outras palavras, que a relação formal de equivalência entre derivações é *completa* com respeito à relação informal entre derivações que representariam a mesma prova.

Longe de um critério arbitrariamente concebido, essa ideia é inspirada em larga medida por concepções filosóficas e resultados formais simples e interessantes, como se pretende deixar claro na sequência.

3. Discutindo a tese: questões formais e conceituais

a. Ideia informal e resultados formais relevantes (possivelmente favoráveis)

Em conformidade com as hipóteses iniciais a respeito de como se manipula as noções de *prova*, *derivação* e a relação entre elas em um arcabouço semântico, a tese da normalização parece fazer sentido como uma resposta à

¹⁴ Em nome da brevidade, a terminologia do lambda-cálculo será frequentemente empregada em referências às reduções e conversões, ainda que a discussão aqui ocorra no âmbito da dedução natural. Esse dispositivo é especialmente inócuo aqui, uma vez que o fragmento conjuntivo-implicativo é suficiente para quase todas as considerações a serem feitas.

questão da identidade de provas se compreendida como uma expressão formal de uma ideia relativamente simples e plausível, a saber:

- (α) quaisquer duas provas cujas diferenças entre si se resolvam em traços *irrelevantes* não são significativamente diferentes;**
(β) quaisquer duas provas que difiram com respeito a qualquer outro traço são significativamente diferentes.

A isso, advogados da tese habitualmente acrescentam que

- (γ) uma prova específica sempre pode ser expressa sem *traços irrelevantes*.**

Em suma, a ideia é que quaisquer duas provas são significativamente diferentes se e somente se elas são diferentes *mesmo quando dadas sem quaisquer traços irrelevantes*. As razões e a forma pelas quais as três cláusulas propostas parecem motivar a tese da normalização são discutidas em maior nível de detalhe em de Castro Alves 2018; será oferecida aqui apenas uma indicação de algo de essencial a esse respeito.

A cláusula (α), em primeiro lugar, seria a concepção informal motivadora da parte da *correção* da tese da normalização. Essa alegação se funda fortemente, entre outras razões, numa certa interpretação semântica do chamado *princípio de inversão*. Assim denominado originalmente por Lorenzen, este é formulado por Prawitz em sua tese de 1965 nos seguintes termos:

Seja α uma aplicação de uma regra de eliminação que tem B como consequência. Então, derivações que satisfazem a condição suficiente [...] para derivar a premissa maior de α , quando combinadas com derivações das premissas menores de α (caso as haja), já “contêm” uma derivação de B ; assim, a derivação de B pode ser obtida diretamente das derivações mencionadas sem a adição de α .¹⁵ (PRAWITZ, 1965, p.33)

¹⁵ No original: “Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition (...) for deriving the major premiss of α , when combined with deductions of the minor premisses of α (if any), already “contain” a deduction of B ; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α .” Tradução livre do autor.

O princípio se refere primeiramente ao seguinte padrão dedutivo:

$$\frac{\frac{\Pi_1, \dots, \Pi_n}{*^n(A_1, \dots, A_{n_1})} \quad \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ C_1 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \Gamma_m \\ \vdots \\ C_m \end{array}}{B} \alpha$$

Grosso modo, sua alegação é a de que B , a conclusão, poderia sempre ser obtida evitando-se a introdução de $*^n(A_1, \dots, A_n)$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \Gamma_i \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ \Pi_j \\ \vdots \\ B \end{array}$$

Embora isso evidentemente não seja o caso em geral, a restrição às constantes e regras pretendidas pelo autor de fato confirma o princípio. Para cada tal constante, o primeiro padrão dedutivo pode ser reescrito na forma do segundo por meio dos passos de redução descritos por Prawitz na sequência do mesmo texto (p.36 – 38) – todos eles incluídos nos mesmos mencionados aqui na seção 2.1.

Contudo, é importante observar que, logo antes de apresentar os passos de redução, Prawitz refraseia o recém-formulado princípio de inversão em termos mais abertamente semânticos (grifos por minha conta):

O princípio de inversão diz, com efeito, que nada é ‘ganho’ inferindo-se uma fórmula por introdução para usá-la como premissa maior em uma eliminação.¹⁶(PRAWITZ, 1965, p. 33 – 34)
Notamos que a consequência de uma regra-I [regra de introdução] que é também uma premissa maior de uma regra-E [regra de eliminação] constituem uma complicação em uma dedução. Como tal complicação pode ser removida[...], podemos nos perguntar se é possível transformar toda dedução em uma dedução ‘normal’ correspondente que proceda, por assim dizer, diretamente, sem quaisquer desvios, das hipóteses para a fórmula final.¹⁷(PRAWITZ, 1965, p.34)

¹⁶ No original: “The inversion principle says in effect that nothing is ‘gained’ by inferring a formula through introduction for use as a major premiss in an elimination.” Tradução livre do autor.

Perceba-se, portanto, que os padrões dedutivos removíveis de derivações no decorrer do procedimento de normalização são, desde esse tenro ponto de sua história, caracterizados como, em algum sentido importante, supérfluos. Discutivelmente, a ideia é que esse caráter “supérfluo” se estenderia a todos os padrões dedutivos removidos ou inseridos em derivações em sua normalização, e que estes, em conjunto, instanciaríamos a noção de “traço irrelevante” em termos da qual a cláusula (α) se enuncia. A parte da completude da tese da normalização equivaleria então à alegação de que *apenas esses* padrões dedutivos instanciaríamos uma tal noção de “traço irrelevante” – isto é, que quaisquer outros traços quanto aos quais derivações difiram entre si seriam suficientes para estas serem entendidas como significativamente diferentes.

Ademais, o último questionamento de Prawitz no trecho recém-transcrito se deixaria responder afirmativamente pelo chamado *teorema da normalização*, demonstrado pelo próprio na própria tese de 1965¹⁸. Por razões relativamente simples, esse resultado pode ser convincentemente descrito como o responsável pela adição da cláusula (γ) acima às duas anteriores, e, simultaneamente, como um atestado formal de que, caso as cláusulas (α) e (β) encontrem na tese da normalização uma expressão formal adequada, então a cláusula (γ) se segue delas.

De fato, o teorema da normalização e mais dois resultados formais – a saber, o *teorema da forma normal* e a *unicidade da forma normal* – parecem cruciais, tanto do ponto de vista histórico quanto do conceitual, para a proposta da tese da normalização como um todo.

Em primeiro lugar, o teorema da *forma normal* estabelece que, para toda fórmula A e todo conjunto Γ de fórmulas, se A pode ser derivada a partir de Γ , então A pode ser derivada a partir de Γ de forma *normal* (isto é, sem a

¹⁷ No original: “We note that a consequence of an I-rule which is also major premiss of an E-rule constitutes a complication in a deduction. As such a complication can be removed (...), we may ask whether it is possible to transform every deduction to a corresponding ‘normal’ one which proceeds, so to say, directly, without any detours, from the assumptions to the end-formula.” Tradução livre do autor.

¹⁸ Em sua chamada versão fraca, e não contemplando todas as reduções mencionadas na seção 2.1 deste. O teorema da normalização forte, envolvendo todas as reduções mencionadas, é descrito por Prawitz em seu já referido texto de 1971.

ocorrência de fórmulas/segmentos máximos na derivação); isto é, toda relação de consequência válida entre dados A e Γ é demonstrável sem recurso a derivações não-normais. Esse resultado pode ser entendido como um tipo de teorema de completude que parece essencial à tese da normalização, que poderia ser enunciado da seguinte maneira: todo *resultado* que pode ser provado pode ser provado de forma *normal*; ou: derivações normais são suficientes para provar todos os *resultados* que podem ser provados.

Além disso, o *teorema da normalização* provê um procedimento mecânico por meio do qual derivações em geral podem ser reduzidas a derivações normais. Isso mostra que a diferença (sintática) entre derivações em geral e suas formas normais se resolve, como já discutido, em certos padrões dedutivos (a saber, aqueles envolvidos nas reduções descritas acima) que “não têm papel” na dedução da fórmula final a partir das fórmulas iniciais não-descarregadas – independentemente da maneira particular em que essa dedução é levada a cabo –; e que supostamente poderiam, portanto, nos termos da discussão acima da leitura semântica do princípio de inversão, ser convenientemente removidos ou inseridos sem consequências para a realização bem sucedida da dedução específica em questão; ou em outras palavras, sem alterar significativamente a dedução em questão. Assim, a cláusula de correção da tese da normalização parece equivaler à alegação de que a remoção/inserção desses padrões dedutivos de/em uma derivação é inócua¹⁹, em algum sentido, para o seu *valor semântico*; e, logo, supostamente irrelevante para a determinação de qual prova é representada pela derivação em que essas remoções/inserções sejam eventualmente realizadas.²⁰

A *unicidade da forma normal*, por sua vez, empresta ao procedimento de normalização os contornos de uma *avaliação* em que derivações são julgadas univocamente quanto a qual prova representam, derivações normais assumindo o papel de valores de identidade – ou melhor, em maior conformidade aos termos da formulação oficial da tese, representantes canônicos únicos de

¹⁹ Prawitz reconhece explicitamente no texto de 1971, p. 257, que isso pode não se aplicar no caso dos “redexes” das chamadas reduções permutativas associadas às eliminações da disjunção e do quantificador existencial.

²⁰ Argumentos para defender essa proposta são explorados na seção III.2.a de de Castro Alves 2018.

provas, que seriam os valores de identidade propriamente ditos. A situação pode ser considerada análoga ao que ocorre com, por exemplo, expressões numéricas em geral e numerais canônicos como representantes de números naturais: por si só, o próprio fato de que “3+2”, “4+1”, “1+2+2”, etc. se reduzem em última análise a “5” e apenas a “5” pode ser entendido como sugerindo que todas essas expressões numéricas teriam o mesmo valor, a saber, 5 – isto é, o valor “direto”, “desquotacional” de “5”. Dessa forma, derivações em geral podem ser entendidas como *métodos* para a obtenção de derivações normais – exatamente como a expressão numérica “1+2+2” pode ser vista como um *método* (viz. um algoritmo) para a obtenção do numeral “5”. Outrossim, assim como “1+2+2” e “5” representam o mesmo número, 5, uma derivação qualquer e a derivação normal à qual esta se reduz representariam a mesma prova. Esse tipo particular de compreensão do procedimento de normalização é presumivelmente uma das principais motivações por trás de uma das reformulações mais populares da tese da normalização, usada, por exemplo, por Troelstra²¹: Duas provas correspondentes a derivações Π e Σ são a mesma se e somente se Π e Σ se reduzem à mesma forma normal.

b. Derivações como “representantes” de provas

Uma vez caracterizadas as principais ideias formais e conceituais envolvidas na proposta da tese da normalização, passemos à tentativa de descrição de algumas concepções semânticas mais básicas envolvidas em sua formulação – a saber, as concernentes à ideia de derivações como “representantes” de provas.

A formulação “oficial” da tese carrega consigo um ponto de partida semântico fulcral que constitui, para muito além de uma determinação característica de uma resposta para uma pergunta a respeito da identidade de provas, claras indicações dos termos em que essa pergunta deve ser formulada de saída. Trata-se do seguinte: derivações são concebidas como “representantes” de provas – e estas últimas, em contrapartida, são concebidas como seus valores semânticos. Tomando como ponto de partida a formulação

²¹ A.S. Troelstra, Non-extensional equality, Fund. Math. 82 (1975), pp. 307-322.

preliminar da questão da identidade de provas, percebe-se que essa concepção particular dos papéis e da relação semântica entre provas e derivações enseja um deslocamento do que está em jogo nela. Recordando: Dado que Π é uma prova e que Σ é também uma prova, quando é que dizemos que Π e Σ são a mesma prova? – No cenário ora sob consideração, essa pergunta dá lugar àquela para a qual a tese da normalização oferece uma resposta, a saber: “Quando duas derivações representam a mesma prova?”. Esta última caracteriza, com efeito, uma busca por como mapear certas entidades linguísticas/sintáticas, as derivações, em valores semânticos, as provas. Note-se que a questão da identidade de provas é assim transfigurada – caso tomemos a questão respondida pela tese da normalização como, de fato, uma interpretação da questão sobre a identidade de provas nos termos da formulação preliminar – de uma busca direta por um critério de identidade entre provas para uma questão que concerne, antes de qualquer outra coisa, à *sinonímia* ou, mais especificamente, à *co-referencialidade* de derivações. Destarte, a identidade dos valores semânticos designados por estas, que nesse cenário, seguindo Prawitz, é o que chamamos propriamente de *provas* (o que quer que se considere que estas sejam), pode permanecer, em princípio, um assunto simplesmente não abordado.

Uma vez estabelecido que a relação entre provas e derivações é a de que estas últimas representam – e assim, em particular, *designam* – aquelas primeiras, algumas conclusões ulteriores podem ser aduzidas levando-se em consideração algumas consequências formais simples da tese da normalização tomada em sua formulação oficial. A primeira a ser notada é a seguinte: dado que há derivações equivalentes distintas, segue-se que uma mesma prova pode ser designada por derivações distintas. Mas o que dizer da conversa desse enunciado? – i.e. poderia uma dada derivação ser tomada por representante de provas distintas? É importante notar que há uma assimetria entre essas expressões das duas direções da relação de representação entre derivações e provas, que se deve à presença de uma ambiguidade na expressão “provas distintas” na formulação da segunda direção, que não ocorre no caso da expressão “derivações distintas”. Enquanto “derivações distintas” se refere

neste contexto inequivocamente a quaisquer dois objetos sintáticos distintos entendidos como derivações, “provas distintas” pode querer dizer ou bem, por um lado, provas entre as quais a relação de identidade de provas – independentemente de como se decida entendê-la – não ocorra; ou bem, por outro, provas que sejam simplesmente objetos distintos (numericamente, digamos), a despeito de se esses objetos são ou não identificados pela relação de identidade de provas. Se se toma a expressão no primeiro desses sentidos, parece que a pergunta – a saber: “poderia uma dada derivação ser tomada por representante de provas distintas?” – deveria então ser respondida negativamente no contexto da tese da normalização. Não fosse assim, derivações poderiam ser *ambíguas* quanto à sua referência, i.e. uma única e mesma derivação poderia ter valores semânticos distintos e não equivalentes entre si. E exatamente aqui se evidencia um outro ponto de partida semântico implícito da tese sob discussão: a *univocidade* das derivações com respeito às respectivas provas que representam. No segundo sentido, no entanto, a resposta à pergunta poderia, em princípio, ser positiva. A fim de ilustrar essa colocação, suponha-se que derivações são um *doppelgänger* sintático da prova que designam; exatos “retratos” delas, de tal modo que haveria uma prova distinta correspondente a cada derivação. Dessa maneira, para que uma derivação pudesse designar provas distintas mesmo sob a hipótese da tese da normalização, bastaria que, por exemplo, se admitisse que a relação de identidade viz. equivalência entre os *designata*, as provas, é o exato reflexo daquela entre as derivações que as têm como referência; de tal modo que, digamos, duas derivações distintas Π e Σ que designassem, respectivamente, as conseqüentemente equivalentes e distintas provas $\mathbf{\Pi}$ e $\mathbf{\Sigma}$ também designariam, respectivamente, $\mathbf{\Sigma}$ e $\mathbf{\Pi}$. Dessa forma, uma derivação poderia se referir a muitas provas distintas – ainda que equivalentes; de fato, a tantas quantas houvesse derivações distintas equivalentes a ela.

Esse segundo cenário parece deformar um pouco a pergunta “quando duas derivações representam *a mesma* prova?” na direção de “quando é que duas derivações representam provas *equivalentes*?”; pois ainda que ela sirva como uma resposta à primeira dessas, ela parece muito mais afinada conforme

a segunda. De qualquer forma, ele goza da virtude de fazer mais justiça à ideia de que a tese da normalização responde, e seus próprios termos, a uma questão que concerne efetivamente à identidade ou à equivalência entre *provas*, ao invés de meramente a alguma relação de equivalência semântica entre derivações; pois ele se constrói em termos de uma certa concepção de prova como uma cópia de uma derivação no nível dos objetos que estas designam. Assim, uma vez que a relação de equivalência entre derivações é estabelecida de um certo modo, também o é aquela da identidade entre provas. Esse pano de fundo semântico para o estudo das propriedades e relações concernentes a provas – e, em particular, da questão da identidade de provas – claramente instancia a estratégia geral descrita por Kreisel em seu *Survey of Proof Theory II*, de 1971, p.111:

A natureza geral de nosso problema é bem clara. Considere regras formais cuja função é formalizar certas provas; em outras palavras, temos objetos sintáticos, derivações d , que representam ou descrevem atos mentais \mathbf{d} , as provas (que trazem convicção); [...] a relação entre d e \mathbf{d} [...] é um caso particular da relação geral entre palavras e os pensamentos que elas expressam. Como estamos lidando com uma classe “pequena” de palavras, podemos esperar por resultados mais precisos que os conhecidos para a relação mais geral (e mais familiar!). [...]

Dada uma propriedade P ou uma relação R entre provas, nossa tarefa é encontrar relações P_F , resp. R_F , tais que, para toda d de nosso sistema formal, $P_F(d)$ sse $P(\mathbf{d})$ e $R_F(d, d')$ sse $R(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$. Para fins de exposição, invertemos esse procedimento, e descreveremos primeiro algumas relações formais P_F , R_F que serão então usadas para enunciar os fatos sobre os objetos de interesse principal, a saber, propriedades e relações de provas.^{22 23}(KREISEL, 1971, p.111)

²² No original: “The general nature of our problem is quite clear. Consider formal rules which are intended to formalize certain proofs; in other words, we have syntactic objects, derivations d which represent or describe mental acts \mathbf{d} , the proofs (which carry conviction);[...] the relation between d and \mathbf{d} [...] is a particular case of the general relation between words and the thoughts they express. Since we are dealing with a "small" class of words, we can hope for more precise results than are known for the more general (and more familiar!) relation. (...)

Given a property P or a relation R between proofs our task is to find relations P_F , resp. R_F such that for all d of our formal system $P_F(d)$ iff $P(\mathbf{d})$ and $R_F(d, d')$ iff $R(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$. For exposition, we shall reverse this procedure, and first describe some formal relations P_F , R_F which will then be used to state the facts about the objects of principal interest, namely properties and relations of proofs.” Tradução livre do autor.

²³ Kreisel parece pressupor, para este tipo de observação, que os enunciados em questão sobre propriedades de provas e derivações são contextos “extensionais”; isto é, em que podemos substituir expressões co-referenciais neles *salva veritate*. Dada a carga epistêmica habitualmente associada ao que tratamos por *provas*, esse não parece um ponto de partida trivial.

Um problema óbvio com essa abordagem dos *doppelgänger* é que ela torna o vocabulário referencialista de “representação” envolvido na formulação da tese da normalização dispensável. A hipóstase de provas como objetos distintos de e designados por derivações se torna, por assim dizer, barba para a navalha de Ockham; afinal de contas, é claramente possível simplesmente tomar a tese da normalização como a caracterização de uma relação de equivalência entre derivações (que poderíamos perfeitamente convencionar chamar de provas – como de fato, aliás, frequentemente se faz), e considerar estas, ao invés de “representantes” sintáticos de objetos de uma natureza mais infável, como *elas próprias* as provas cuja identidade viz. equivalência se pretende investigar. Assim, seria possível suprimir completamente o modo de expressão referencialista e formular a tese nos seguintes termos: Duas derivações/provas são *sinônimas* se e somente se elas são equivalentes (no sentido de Prawitz). Essa forma de colocar a tese habilitaria a abordagem de provas como expressões linguísticas, e, assim, da questão da identidade de provas como pertinente à *semântica* das expressões linguísticas em questão – na esteira da caracterização do problema a que foi conferida primazia na seção 1.2 acima.

Não obstante, é um fato incontornável que um modo de expressão referencialista *foi usado* na formulação oficial da tese. Assim, para que se possa interpretá-lo de forma mais respeitosa, é mais fácil responder negativamente à pergunta a respeito de se uma derivação pode ou não se referir a provas distintas também no segundo sentido mencionado acima²⁴, e

²⁴ Ainda que não seja impossível fazer o contrário. Poder-se-ia, por exemplo, considerar toda derivação β -normal distinta Π_i de A a partir de Γ como um representante canônico de uma prova Π_i correspondentemente distinta, e dizer que toda derivação que se reduz a Π_i também designaria a prova Π_i . Além disso, sejam as Π_i , a despeito de serem distintas entre si, todas *equivalentes* entre si; digamos, por exemplo, pelo fato de todos os seus representantes canônicos serem em última análise redutíveis a uma única forma $\beta\eta$ -normal. Então, toda derivação que se reduzisse a Π_i designaria a prova Π_i , mas não apenas ela; elas também designariam as provas equivalentes a Π_i . Poder-se-ia então interpretar o sentido desse cenário da seguinte maneira: derivações β -normais seriam os *doppelgängers*, os representantes canônicos de provas concebidas como os conteúdos *intensionais* de derivações, de tal modo que provas β -conversíveis entre si compartilhariam esse conteúdo intensional. Estes últimos, as provas, seriam *elas próprias* equivalentes/idênticos quando seus representantes canônicos se reduzissem a uma mesma forma $\beta\eta$ -normal. Nesse cenário, derivações podem designar mais de uma prova; as provas não podem ser simplesmente consideradas barba para a navalha de Ockham sem mais; e a abordagem ofereceria uma resposta não apenas à questão da equivalência semântica entre derivações, mas também, em seus próprios termos e literalmente,

entender a tese da normalização como uma solução para a questão da identidade de provas de uma forma bastante simples. A saber: primeiramente, como sugerindo de saída que cada derivação, além de *unívoca*, i.e. além de *referir-se apenas a objetos equivalentes*, também se refere a *apenas um* objeto (prova); em segundo lugar, como sugerindo que a relação de equivalência entre derivações é, tal como observado, necessária e suficientemente condicionada pela sua *co-referencialidade* – isto é, pelo fato de que designam *uma única e mesma prova*; e terceiro, como sugerindo que a relação de identidade/equivalência concernente às *provas* elas próprias, os objetos designados, deve ser tomada por vigente somente entre um objeto e ele mesmo, i.e. é trivial e, por conseguinte, desinteressante. Ainda que essa abordagem torne difícil compreender em que sentido a tese da normalização responde a algum problema digno do rótulo “identidade de provas” – ao invés de, digamos, co-referencialidade de derivações –, ele certamente acomoda muito melhor o modo referencialista de expressão adotado na formulação da tese.

Neste ponto da reflexão, em que já se evidenciou que não é em absoluto necessário hipostasiar provas como *designata* de derivações sintaticamente concebidas para se formular a tese da normalização de modo plausível; e também que, com efeito, a hipóstase de tais objetos e relações semânticas referenciais torna a tese bastante suscetível a acusações sérias, como a de postular existências sem propósito ou simplesmente não abordar um problema digno do título “identidade de provas”; caberia questionar quais seriam então as razões para escolher formular a tese da normalização em seu registro referencialista tradicional. A respeito desse assunto, me parece particularmente interessante sublinhar que a tese da normalização, tal como enunciada por Prawitz em 1971, é imbuída de contornos *descritivos*, e não *estipulativos* – de fato, é frequente na literatura referir-se à tese da normalização como a “conjectura” da normalização; fê-lo o próprio Prawitz ao enunciá-la, além de, por exemplo, Kosta Došen 2004 e Filip Widebäck 2001. Em outras palavras, a

àquela a respeito da identidade de provas. Uma tal teoria precisaria, contudo, de fundamentação filosófica sólida a fim de não se reduzir a um mero dispositivo *ad hoc* em prol da defesa, simultaneamente, da relevância da hipóstase de provas demandada pela formulação representacionalista da tese da normalização, e de que o assunto abordado pela tese da normalização é de fato a identidade de provas, e não apenas a equivalência entre derivações.

tese é enunciada como uma proposta possivelmente verdadeira, possivelmente falsa, de descrição da relação de identidade de provas, e não como uma definição que, mais do que meramente descrever, *estipula* a natureza de tal relação. Esse interessante e importante aspecto da tese da normalização é amplamente discutido no capítulo V de de Castro Alves 2018, donde se pode extrair material para uma compreensão mais sólida da diferença que ele faz para o ponto ora sob consideração. Aqui, restringir-se-á as observações a esse respeito ao seguinte: a hipóstase de provas como objetos designados por derivações permite uma solução de espírito fregeano para a questão de se duas derivações representam ou não a mesma prova. Assim como a estrela da manhã e a estrela da tarde são idênticas em virtude de serem o mesmo corpo celeste, ou 117+136 e 253 são idênticos em virtude de serem o mesmo número natural – o que implica que “a estrela da manhã” [“117+136”] e “a estrela da tarde” [“253”], a despeito de suas eventuais diferenças em *Sinn* (sentido), são des-crições do mesmo objeto (i.e. têm a mesma *Bedeutung* (significado, referência)) e podem, assim, ser argumentos de um enunciado de identidade verdadeiro e informativo –, também seria o caso de, digamos,

$$\frac{\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{A \quad B}}{A \wedge B} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_1}{A} \quad \frac{\Pi_3}{A}$$

(e aqui as derivações estão sendo *usadas*, e não mencionadas) serem idênticas em virtude de serem a mesma prova – o que implica que

$$\left\langle \frac{\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{A \quad B}}{A \wedge B} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\Pi_1}{A} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\Pi_3}{A} \right\rangle$$

(e agora as derivações estão sendo *mencionadas*), apesar de seus “sentidos” eventualmente diferentes, são “representantes” do mesmo objeto, servindo assim como argumentos para um enunciado de identidade verdadeiro. O modo

de expressão referencialista pode então ser compreendido como um ingrediente essencial à possibilidade de se recorrer à idéia de que *provas*, tomadas como efetivos *objetos*, e sua natureza, i.e. as propriedades que apresentam e as relações de que participam, são o derradeiro fundamento para a (in)adequação de um critério para a verdade ou falsidade de enunciados a respeito da equivalência semântica de derivações – o que seria, de outro modo, inteiramente dependente de estipulações ou convenções a respeito do sentido (*Sinn*, ou – para nos desvincular das terminologia e doutrina fregeanas – significado em acepção *intensional*) dos últimos, relegando a tese da normalização ao estatuto de uma abordagem puramente definicional da sinonímia/identidade de derivações/provas. Como já observado, contudo, o rótulo “identidade de provas” para uma investigação concebida em tais termos segue sendo relativamente enganoso: assim como a investigação de Frege em *Über Sinn und Bedeutung* não toma por objeto a identidade de corpos celestiais, números naturais ou outros objetos, mas é antes “*über Sinn und Bedeutung*” – i.e. concerne a fenômenos relacionados à semântica de *expressões linguísticas* que *se referem a* corpos celestes, números naturais e outros objetos –, a ora sob escrutínio tampouco parece concernir à identidade dos *designata* chamados de provas, mas, antes, à co-referencialidade de derivações concebidas como objetos sintáticos. Ademais, há ainda um “elefante na sala” caso se queira adotar essa abordagem referencialista à questão da identidade de provas: se, por um lado, sabemos muito bem o que são, por exemplo, corpos celestes e como identificá-los e distinguí-los adequadamente, não parece que temos o mesmo grau de clareza a respeito dos elusivos supostos objetos que nesse contexto chamamos de provas.

4. Conclusão

Além de uma caracterização da questão da identidade de provas e de sua legitimidade e relevância como um problema filosófico, o presente esforço debruçou-se também sobre da tese da normalização, a principal proposta de abordagem de índole formal desse problema filosófico. Procurou-se não apenas descrever os aspectos explícitos desta última, como também evidenciar

certos pressupostos semânticos basilares e críticos de sua formulação tradicional, analisando também sua influência no grau de plausibilidade da tese.

Observou-se que os termos referencialistas em que a tese da normalização é habitualmente formulada põem em xeque, de acordo com sua própria economia terminológica, a possibilidade de a tese oferecer, mesmo em princípio, uma resposta que concirna propriamente à identidade de provas. Ademais, a caracterização de derivações como meros “objetos sintáticos” – de aroma metamatemático e tributária de uma concepção de linguagem a partir da cisão forçada e, após Tarski, hegemônica e naturalizada em lógica, entre *sintaxe* e *semântica* – dificulta que se as compreenda como compatíveis com análises semânticas de qualquer natureza independentemente de atribuir-se a elas dimensões semânticas que, por assim dizer, as transcendam.

Buscou-se, contudo, evidenciar também que o critério de equivalência semântica entre derivações em jogo na tese da normalização não parece depender dos termos representacionistas de sua formulação habitual, e parece, assim, defensável em princípio como uma proposta de resposta à questão da identidade de provas como concernente à sinonímia de provas (derivações) tomadas como expressões linguísticas.

Maiores reflexões acerca do grau de plausibilidade da tese da normalização tomada em seus diferentes registros – referencialista ou não referencialista, descritivo ou estipulativo – são levadas a cabo em de Castro Alves 2018. Para os propósitos deste esforço, é cabível apenas repetir o que Kreisel já em 1971 dissera a respeito dessa abordagem do problema aqui apresentado, e que permanece verdadeiro a despeito de seus (de)méritos ulteriores: “no presente momento, o critério [da tese de normalização] tem uma utilidade pedagógica: ele corrige a pressuposição comum de que “nada” preciso (e razoável) pode ser feito a respeito de questões sobre sinonímia de provas.”²⁵ (KREISEL, 1971, p.117)

²⁵ No original: “...at the present time, the criterion [of the normalisation thesis] has a pedagogic use: it corrects the common assumption that “nothing” precise (and reasonable) can be done on questions about synonymy of proofs.” Tradução livre do autor.

5. Referências

ARISTÓTELES. *Aristotle's Prior Analytics book I*. Translated with an introduction and commentary by Gisela Striker (Clarendon Aristotle Series). New York: Oxford University Press, 2009.

DE CASTRO ALVES, Tiago. *Synonymy and Identity of Proofs: a Philosophical Essay*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen, 2018.

DOŠEN, Kosta. “Identity of proofs based on normalization and generality”. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 9, 2003, p. 477-50.

FREGE, Gottlob. “Über Sinn und Bedeutung”. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF 100, 1892, p. 25-50

JAY, C. Barry, e GHANI, Neil. “The virtues of eta-expansion.” *J. Functional Programming*, 5 (2), 1995, p. 135-154

KANT, Immanuel. *Escritos Pré-Críticos*. Trad. Jair Barboza et al. São Paulo: Edunesp, 2005.

KANT, Immanuel. *Lógica*. Trad. por Guido Antônio de Almeida. (Série Estudos Alemães, 93). 2ª ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1992.

KREISEL, Georg. “A survey of proof theory II”. In: FENSTAD, J.E. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 109-170.

PRAWITZ, Dag. *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965.

PRAWITZ, Dag. “Ideas and results in proof theory”. In: FENSTAD, J.E. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 235-307.

SCHROEDER-HEISTER, Peter. “Proof-Theoretic Semantics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/proof-theoretic-semantics/>>

SUNDHOLM, Göran. “Identity: Absolute. Criterial. Propositional”. In: CHILDERS, T. (ed.), *The Logica Yearbook 1998*. Praga: The Institute of Philosophy, Academy of Sciences of the Czech Republic, 1999, pp. 20-26.

TROELSTRA, A. Sjerp. “Non-extensional equality”. *Fund. Math.* 82, 1975, p. 307-322.

WIDEBÄCK, Filip. *Identity of Proofs*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Stockholms Universitet, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 2001.