

**SOBRE A PROVA DE QUE TODO NÚMERO NATURAL TEM UM
SUCESSOR EM DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK, §§82-3¹**

*On the proof that every natural number has a successor in Die
Grundlagen der Arithmetik, §§82-3*

Alessandro Bandeira Duarte²

RESUMO

O objetivo do artigo é apresentar uma derivação alternativa dentro da Aritmética de Frege do teorema 149 de *Grundgesetze der Arithmetik*, que desempenha um papel central na prova do teorema que afirma que todo número natural tem um sucessor. Em *Grundgesetze*, a derivação desse teorema depende do teorema IVa, cujo análogo na Aritmética de Frege (IVa*) é independente dos axiomas do sistema. É mostrado que o uso de IVa em *Grundgesetze* não é essencial e, portanto, que (IVa*) não é necessário para a derivação do teorema 149 dentro da Aritmética de Frege.

Palavras-chave: Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik. Grundgesetze der Arithmetik*. Teorema 149. Teorema Iva.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present an alternative derivation within Frege's Arithmetic of theorem 149 in *Grundgesetze der Arithmetik*, which plays a central role in the proof of the theorem that states that every natural number has a successor. In *Grundgesetze*, the derivation of this theorem depends on the theorem IVa, whose analogue in Frege's Arithmetic (IVa*) is independent of the axioms of the system. It is shown that the use of IVa in *Grundgesetze* is not essential and therefore that (IVa*) is not necessary for derivation of theorem 149 within Frege's Arithmetic.

Key-words: Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik. Grundgesetze der Arithmetik*. Theorem 149. Theorem Iva.

INTRODUÇÃO

Em 1879, Gottlob Frege publicou um pequeno livro chamado *Begriffsschrift*³ no qual ele dava o pontapé inicial em seu projeto filosófico de fundamentar a aritmética dos números naturais (e a análise) na lógica, o qual foi denominado de logicismo. Na visão de Frege, os conceitos aritméticos (e

¹ <https://doi.org/10.51359/2357-9986.2023.258425>

² Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). E-mail: dedekind@ufrj.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4011-5000>.

³ Doravante, usarei as seguintes abreviações para os livros de Gottlob Frege: *Begriffsschrift* (1879) – BS; *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) – GLA; *Grundgesetze der Arithmetik* (1893/1903) – GGA.

da análise) poderiam ser reduzidos a noções puramente lógicas e as verdades da aritmética (e da análise) poderiam ser derivadas a partir de verdades lógicas por meio de inferências puramente lógicas⁴.

Na parte 1 de BS, Frege apresentou as noções lógicas primitivas a partir das quais ele construiu os axiomas lógicos da parte 2 e os conceitos de ordenação em uma sequência na parte 3. Os conceitos definidos de ordenação em uma sequência são a noção de ancestral forte, que é basicamente a noção de fechamento transitivo de uma relação, a de ancestral fraco, que desempenha um papel central na definição de número natural em GLA e em GGA, a de hereditariedade de uma propriedade em uma sequência, que participa da definição do ancestral forte e finalmente a de uma relação ser funcional. Como será observado, Frege foi parcialmente bem-sucedido em BS, uma vez que ele provou teoremas aritméticos importantes na parte 3 desse livro, dentre os quais podemos mencionar: i) indução matemática forte (teorema 81)⁵; ii) transitividade do ancestral forte (teorema 98)⁶; e iii) tricotomia de uma relação sob certas condições (teorema 133)⁷.

Contudo, em BS, Frege não discutiu a natureza dos números, em particular, a dos números naturais⁸. De acordo com a interpretação padrão sobre Frege, a discussão sobre a natureza dos números foi adiada até 1884, ano de publicação de GLA. Este livro pode ser dividido em duas partes: na primeira parte (até §45 de GLA), considerada negativa, Frege buscou apresentar, discutir e refutar uma série de definições rivais da noção de número; e na segunda, tida como positiva, ele apresentou três definições de número cardinal (*Anzahl*), sendo as duas primeiras rejeitadas⁹. A terceira definição de número cardinal¹⁰, que seria bem-sucedida, é estipulada em termos de extensões de conceitos, entidades novas que não tinham sido mencionadas em

⁴ Fica claro em GLA que o objetivo de Frege era derivar proposições equivalentes aos axiomas de Peano: 1) zero é número natural; 2) relação sucessor 1-1; 3) todo número natural tem um sucessor que é um natural; 4) zero não é sucessor de qualquer número natural; e finalmente 5) indução matemática.

⁵ Cf. FREGE, 2019, 120.

⁶ Cf. FREGE, 2019, 130.

⁷ Cf. FREGE, 2019, 149.

⁸ Cf. FREGE, 2019, p. 31.

⁹ Cf. FREGE, 1988, §§55-6, §§64-67.

¹⁰ Frege definiu o operador cardinal “o número de...” explicitamente em termos de extensões de conceito da seguinte forma: o número que pertence ao conceito F =df a extensão do conceito *ser equinúmero a F*.

BS. Estranhamente, Frege não tinha muito a dizer sobre as extensões¹¹, acreditava que a introdução delas não era necessária¹² e em nenhum momento mencionou em GLA um novo axioma que as regulasse. Segundo a interpretação padrão, a partir dessa terceira definição de número cardinal, Frege derivou o agora conhecido Princípio de Hume que, combinado com as definições lógicas de zero, sucessor e número natural, implicaria versões análogas dos axiomas de Peano.

Conforme foi discutido em Duarte (2009, 2022), há um quebra-cabeça relacionado à derivação do Princípio de Hume a partir da definição explícita, pois esta derivação dependeria de um análogo do teorema IVa de GGA¹³, que não é derivável no sistema lógico de BS, o qual muito provavelmente também seria o sistema subjacente de GLA. De fato, o teorema IVa é usado em muitos teoremas de GGA. Mas aqui devemos fazer uma distinção entre usos essenciais e usos não-essenciais. O uso essencial do teorema IVa é quando sem ele a prova é impossibilitada¹⁴. Isso ocorre nas derivações do teorema 1 de GGA¹⁵ e do teorema 32 de GGA¹⁶. Todavia, há vários usos do teorema IVa que podem ser eliminados, uma vez que uma outra rota de derivação é possível¹⁷. Um desses usos é feito na prova de que todo número natural tem um sucessor. Mais em particular, na derivação do teorema 149 de GGA que afirma o seguinte: se a é número natural e d é o predecessor de a ,

¹¹ Cf. FREGE, 1988, §68, nota.

¹² Cf. FREGE, 1988, §107.

¹³ O teorema IVa afirma que se dois termos a e b se implicam mutuamente, então $a = b$. Mais adiante explicaremos o significado de “ $a = b$ ”.

¹⁴ Obviamente estou desconsiderando que o sistema de GGA é inconsistente e clássico e, portanto, que ele deriva qualquer coisa.

¹⁵ É difícil expressar em palavras o teorema 1 de GGA. Ele é uma espécie de compreensão para percursos de valores: $f(a) = a \hat{=} f(\varepsilon)$. Se “ f_ξ ” designar um conceito, podemos ler o teorema 1 da seguinte forma: “ a é F ” tem o mesmo valor de verdade que “ a pertence a extensão de F ”. Dessa versão, segue-se facilmente, como teorema, compreensão para conjuntos: existe uma extensão de conceito y cujos membros são todos os objetos que satisfazer uma propriedade f .

¹⁶ O teorema 32 de GGA afirma que se dois conceitos F e G estão em correspondência 1-1 por alguma relação R , então o número que pertence a F é o mesmo que o número que pertence a G . A inversa é o teorema 49 de GGA: se o número que pertence a F é o mesmo que o número que pertence a G , então existe uma correspondência 1-1 entre F e G por alguma R . Com teorema 32 e o teorema 49, conjuntamente com teorema IVa, Frege poderia derivar o Princípio de Hume, embora tal derivação não seja feita em GGA e nem seja necessária.

¹⁷ Em GGA, o teorema IVa é usado de forma não essencial, por exemplo, na prova de que a relação predecessor é funcional (teorema 71 de GGA), na prova de que a inversa da relação predecessor é funcional (teorema 89 de GGA) e na prova de que se nada cai sob F , então o número que pertence a F é zero (teorema 97 de GGA). Em XXX(XXX), apresentei derivações alternativas desses teoremas sem usar o teorema IVa dentro do sistema lógico de BS.

então o número que pertence ao conceito *pertencer à Pred-série terminada por d* é o mesmo que o número que pertence ao conceito *pertencer à Pred-série terminada por a , mas não ser a* . Frege usou o teorema IVa para determinar que essas duas propriedades são coextensionais sob as hipóteses dadas. Daí ele aplicou o teorema 96 de GGA que afirma que se duas propriedades são coextensionais, então elas têm o mesmo número cardinal.

O objetivo do artigo é apresentar na terceira seção a derivação conceitográfica alternativa do teorema 149 de GGA dentro do sistema lógico de BS/GLA.

Na seção 2, apresento o sistema lógico de BS/GLA que inclui os primitivos lógicos, as leis lógicas, definições lógicas de conceitos aritméticos e teoremas importantes na derivação da versão análoga do teorema 149. Será incluído nesse sistema como primitivo o Princípio de Hume, o que resulta numa teoria que hoje é conhecida por **Aritmética de Frege**. A derivação de análogos dos **Axiomas de Peano** dentro da **Aritmética de Frege** é conhecida por **Teorema de Frege**.

2. ARITMÉTICA DE FREGE

2.1. Os primitivos lógicos

Em 1879, Frege apresenta os seguintes símbolos lógicos primitivos:

1. letras latinas minúsculas: $a, b, c, d, e, f, m, x, y, v, z$, cujo papel é o mesmo de quando elas ocorrem em equações matemáticas tais como: $a + b = b + a$. Nesse contexto, as letras latinas expressam a universalidade da lei comutativa da adição. “ a ” e “ b ” na equação percorrem quaisquer dois números (naturais, inteiros, racionais ou reais)¹⁸. No caso de BS/GLA, as letras latinas percorrem conteúdos conceituais, que podem ser divididos em dois tipos: conteúdos judicáveis (*beurteilbare Inhalte*)¹⁹ e conteúdos não-judicáveis (*unbeurteilbare Inhalte*). Na maioria dos casos, as letras latinas $a, b, \dots, f$

¹⁸ Cf. BS, §1.

¹⁹ Conteúdo passível de ser o caso (verdadeiro) ou não ser o caso (falso).

percorrem conteúdos judicáveis²⁰, pois ocorrem anexadas ao traço de conteúdo na formulação de leis lógicas proposicionais²¹. As letras latinas m, x, y, v, z geralmente percorrem conteúdos não-judicáveis.

2. outras letras latinas: f, g, h, F . Essas letras continuam expressando generalidade, mas, em alguns contextos, elas representam funções em geral. Na parte 2, por exemplo, nas fórmulas 58 a 66, “ f ”, “ g ” e “ h ” percorrem funções unárias. Por outro lado, na parte 3, principalmente nas definições e nas fórmulas que resultam das definições, “ f ” percorre funções binárias. Já “ F ” percorre funções unárias²².
3. traço de juízo: $\vdash$, cujo papel é transformar um termo do sistema numa fórmula. O traço de juízo será anexado aos axiomas do sistema, indicando que eles são o caso (verdadeiros). As regras de inferência do sistema são preservadoras de verdade, portanto tudo que se segue dos axiomas por meio das regras de inferência será prefixado com o traço de juízo.
4. traço de conteúdo: $_$, que desempenha um papel sintático restritivo dentro do sistema lógico de BS/GLA. O traço de conteúdo apenas pode ser anexado a termos que expressam conteúdos judicáveis. Essa restrição sintática se estende também ao traço de juízo, uma vez que ele é sempre anexado a um traço de conteúdo²³.

²⁰ Mas nem sempre. Na fórmula 68 de BS, por exemplo, “ c ” pode expressar um conteúdo não-judicável, o que é o caso na derivação da fórmula 116 de BS. As letras latinas também tem um significado ambíguo quando ocorrem em sentenças contendo o símbolo para identidade de conteúdo “ $\equiv$ ”. Como será visto, esse símbolo é flanqueado por conteúdos conceituais e, portanto, na fórmula 54 de BS “ $\vdash c \equiv c$ ”, “ c ” pode percorrer tanto conteúdos judicáveis como conteúdos não-judicáveis.

²¹ A letra “ f ” tem significado ambíguo em BS. Ora ela usada para expressar um conteúdo judicável como no teorema 22 de BS ora ela é usada como uma letra de função que, quando complementada por um argumento, produz um conteúdo conceitual.

²² Em BS, Frege não tem uma clara distinção entre funções de primeira ordem e funções de segunda ordem. Assim, fórmulas tais como 58 e 68 são utilizadas ou como uma versão de primeira ordem da instanciação universal ou como uma versão de segunda ordem da instanciação universal. Em uma carta de Frege (1980, p. 101; 1976, p. 164-5) a Marty de 1882, Frege já tinha essa distinção bastante clara em mente e, portanto, parece razoável assumir que, nessa época, ele já tivesse introduzido uma versão de segunda ordem da fórmula 58 para funções unárias no sistema. Além disso, parece ser razoável assumir que ele também tenha introduzido uma versão de segunda ordem da fórmula 58 para funções binárias, uma vez que ele tinha que lidar com quantificação sobre relações por causa do Princípio de Hume.

²³ Cf. BS, §2.

5. traço condicional: $\sqsubset$, que expressa a implicação material. No sistema lógico de BS/GLA, a leitura da implicação é lida de “baixo para cima”. Assim a expressão “ a implica materialmente b ” – $(a \supset b)$ – é traduzida na linguagem de BS pela fórmula $\sqsubset_a b$. É importante notar que o traço condicional liga o traço de conteúdo de a ($\text{---} a$) e o traço de conteúdo de b ($\text{---} b$), portanto “ a ” e “ b ” têm de percorrer conteúdos judicáveis.
6. traço de negação: $\neg$, que expressa a negação na linguagem de BS/GLA. Assim a expressão “não é o caso que a ” é traduzida por “ $\neg a$ ”. O traço de negação se anexa na parte inferior do traço de conteúdo de a ($\text{---} a$), portanto “ a ” deve percorrer conteúdos judicáveis.
7. quantificador universal: $\forall$
8. letras góticas: $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta, \eta$. As letras góticas ocorrem sempre dentro da concavidade do quantificador universal e em algum lugar no termo que se segue. Elas desempenham um papel semelhante a variáveis ligadas²⁴. A expressão “Todo F é G ” pode ser traduzida pela seguinte fórmula de BS: $\forall \alpha \sqsubset G(\alpha)$. Em geral, as letras góticas minúsculas percorrem conteúdos conceituais (judicáveis ou não-judicáveis). “ ζ ” percorre funções unárias de primeira ordem. “ η ” percorre funções binárias de primeira ordem. Em BS Frege não introduziu explicitamente “ η ”, mas muito provavelmente isso foi assumido no sistema de 1882²⁵ e em GLA.
9. a identidade de conteúdo: $\equiv$. Esse é o símbolo mais controverso do sistema lógico de BS. Em primeiro lugar, a introdução desse símbolo em BS (§8) parece ser metalinguística, uma vez que a identidade de conteúdo se liga aos símbolos que expressam conteúdos conceituais. Não obstante, ao longo de BS, principalmente nas definições e derivações de teoremas, a identidade de conteúdo parece assumir o papel de identidade objectual como, por exemplo, na definição de funcio-

²⁴ Mas é importante ressaltar que Frege não admitia quantificação vazia.

²⁵ Na carta de Frege (1980, p. 102; 1976, p. 165) a Marty em 1882, ele afirma que estava próximo de terminar um livro no qual ele derivava teoremas análogos aos axiomas de Peano. No contexto da carta, fica claro que esse livro foi escrito na linguagem de BS e, portanto, ele não pode ser GLA.

nalidade de uma relação ou nas fórmulas 52 e 57 de BS que conjuntamente parecem expressar a indiscernibilidade de idênticos ou na fórmula 54 que parece expressar a lei de que todo indivíduo é idêntico a si mesmo. Contudo, a identidade de conteúdo parece funcionar também como uma espécie de equivalência quando, nas definições, ela liga o *definiendum* ao *definiens*. Em BS, as definições de Frege têm a seguinte forma: $\Vdash A \equiv B$ ²⁶. “A” é o *definiens* e “B” é o *definiendum*. As definições são transformadas em axiomas – ou seja, $\vdash A \equiv B$ – a partir dos quais Frege desejava obter condicionais $\vdash \frac{B}{A}$ e $\vdash \frac{A}{B}$. Esses condicionais são obtidos a partir das fórmulas 52 e 57. Portanto, elas são ambíguas, pois, nesse contexto, a identidade de conteúdo parece funcionar como equivalência e das fórmulas 52 e 57, dado que “A” e “B” percorrem conteúdos judicáveis, podem ser inferidas as seguintes fórmulas:

$$52^*) \vdash \frac{\vdash \frac{B}{A}}{A \equiv B} \quad \text{e} \quad 57^*) \vdash \frac{\vdash \frac{A}{B}}{A \equiv B}.$$

A partir desses primitivos lógicos, Frege construiu os axiomas primitivos do sistema e as definições de conceitos aritméticos.

2.2. Regras de boa-formação

Nessa seção apresento regras de boa-formação do sistema, embora Frege não tenha quaisquer regras explícitas. Todavia, implicitamente, Frege assume tais regras e na seção anterior já mencionei uma delas, a saber, a regra sintática do traço de conteúdo. É importante ressaltar que a interpretação que será defendida aqui é a de que o sistema lógico de Frege é uma lógica de termos²⁷ e não exatamente uma lógica de predicados no sentido moderno²⁸. Assim, estabeleço as seguintes regras:

²⁶ “ $\Vdash$ ” indica que o símbolo a seguir foi estabelecido por uma convenção. Assim, “ $\Vdash A \equiv B$ ” pode ser traduzido por: a partir de agora, fica estabelecido por convenção de que “A” tem o mesmo conteúdo conceitual que “B”.

²⁷ Os termos percorrem conteúdos conceituais.

²⁸ Poucos autores defendem essa interpretação. É possível mencionar Landini (2006, 2012).

- i. as letras latinas são termos (excetuando-se as letras latinas que, no contexto, expressam funções em geral);
- ii. Se Φ^n expressar uma função n-ária e $\delta_1 \dots \delta_n$ forem termos, então $\Phi^n(\delta_1, \dots, \delta_n)$ é um termo;
- iii. Se δ_1, δ_2 forem termos, então $(\delta_1 \equiv \delta_2)$ é um termo que expressa um conteúdo judicável;
- iv. se Δ_1, Δ_2 forem termos que expressam conteúdos judicáveis, então
 - a) $\text{---} \Delta_1$, b) $\sqsubset \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ e c) $\vdash \Delta_1$ serão termos que expressam conteúdos judicáveis;
- v. se $\text{---} \Phi(\delta)$ for um termo, então $\neg^a \text{---} \Phi(a)$ será um termo;
- vi. se $\text{---} M_\alpha \Phi(\alpha)$ for um termo, então $\neg^{\mathfrak{F}} \text{---} M_\alpha \mathfrak{F}(\alpha)$ será um termo;
- vii. se $\text{---} M_{\alpha, \beta} \Psi(\alpha, \beta)$ for um termo, então $\neg^{\mathfrak{R}} \text{---} M_{\alpha, \beta} \mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ será um termo;
- viii. Nada mais é um termo
- ix. uma fórmula é obtida quando se adiciona o traço de juízo na frente de termos da forma $\text{---} \Delta : \vdash \Delta$.

2.3. Regras de inferências, axiomas e alguns teoremas

2.3.1. Regras de inferências

Essas são as regras de inferência estabelecidas em BS/GLA:

(MP) *Modus ponens*: De $\sqsubset \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ e $\vdash \Delta_1$, inferir $\vdash \Delta_2$ ²⁹;

(GU1) Generalização universal 1: de $\vdash \Phi(\delta)$, inferir $\vdash^a \text{---} \Phi(a)$;

(GU2) Generalização universal 2: de $\vdash M_\alpha \phi(\alpha)$, inferir $\vdash^{\mathfrak{F}} \text{---} M_\alpha \mathfrak{F}(\alpha)$;

(GU2*) Generalização universal 2*: de $\vdash M_{\alpha, \beta} \psi(\alpha, \beta)$, inferir $\vdash^{\mathfrak{R}} \text{---} M_{\alpha, \beta} \mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ ³⁰;

²⁹ Essa regra pode ser generalizada para qualquer quantidade de antecedentes. Qualquer fórmula afirmada que é antecedente em uma fórmula pode ser eliminada.

³⁰ Essa versão não é usada em BS, mas, com a introdução do Princípio de Hume no sistema, ela deve ter sido introduzida em 1882.

(Conf1) Confinamento da generalidade ao consequente 1: de

$$\vdash_{\Delta} \Phi(\delta), \text{ em que } \delta \text{ não ocorre em } \Delta, \text{ inferir } \vdash_{\Delta}^a \Phi(a)_{31};$$

(Conf2) Confinamento da generalidade ao consequente 2: de

$$\vdash_{\Delta} M_{\alpha} \phi(\alpha), \text{ em que } \phi \text{ não ocorre em } \Delta, \text{ inferir } \vdash_{\Delta}^{\mathfrak{F}} M_{\alpha} \mathfrak{F}(\alpha)_{32};$$

(Conf2*) Confinamento da generalidade ao consequente 2*: de

$$\vdash_{\Delta} M_{\alpha\beta} \psi(\alpha, \beta), \text{ em que } \psi \text{ não ocorre em } \Delta, \text{ inferir } \vdash_{\Delta}^{\mathfrak{R}} M_{\alpha,\beta} \mathfrak{R}(\alpha, \beta)_{33}$$

³⁴;

(Sub1) Regra de substituição 1: Dentro de uma fórmula afirmada do sistema, é permitido substituir de maneira uniforme qualquer termo que expresse um conteúdo judicável por outro termo simples ou complexo que também expresse um conteúdo judicável. Exemplo: de

$$\vdash_{\Delta}^a b, \text{ pode-se in-}$$

$$\text{ferir } \vdash_{\Delta}^d \begin{array}{l} d \\ \vdash c \\ b \\ \vdash d \\ c \end{array}, \text{ substituindo-se “a” por “} \begin{array}{l} d \\ \vdash c \end{array} \text{”}.$$

(Sub2) Regra de substituição 2: Dentro de uma fórmula afirmada do

sistema, é possível substituir de maneira uniforme qualquer símbolo para função por outro símbolo que expresse uma função simples ou complexa.

Exemplo: de $\vdash_{\Delta}^a f(c)$, pode-se inferir $\vdash_{\Delta}^h \begin{array}{l} h(c) \\ \vdash g(c) \\ a \\ \vdash h(a) \\ g(a) \end{array}$, substituindo-se “

$f\xi$ ” por “ $\begin{array}{l} h\xi \\ \vdash g\xi \end{array}$ ”.

É importante mencionar uma substituição problemática para funções³⁶ que é feita com bastante frequência em BS. Trata-se da substituição

³¹ Essa regra pode ser generalizada para qualquer número de antecedentes.

³² Essa regra pode ser generalizada para qualquer número de antecedentes.

³³ Essa regra pode ser generalizada para qualquer número de antecedentes.

³⁴ Essa versão não é usada em BS, mas, com a introdução do Princípio de Hume no sistema, ela deve ter sido introduzida em 1882.

³⁵ Essa fórmula pode ser traduzida na linguagem contemporânea pela fórmula

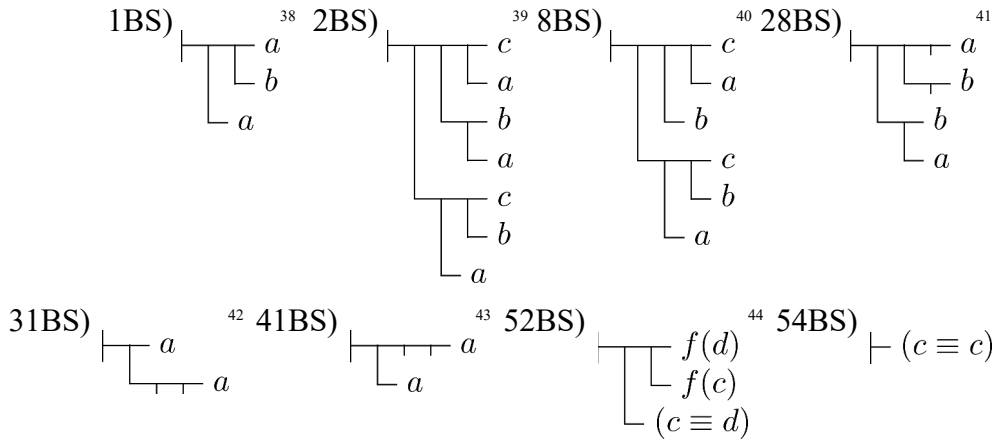
“ $a \supset (b \supset a)$ ”.

³⁶ Por uma questão de espaço, não discutirei esse problema aqui. Contudo ele foi discutido em Duarte (2014).

de “ $f\xi$ ” por “ ξ ”. “ ξ ” representa a função cujo resultado é o próprio argumen-
to³⁷. Essa substituição é feita para se obter das definições de BS os condicio-
nais mencionados acima. No entanto, ela não poderá ser aplicada
universalmente, uma vez que serão introduzidas no sistema BS/GLA defini-
ções dos números individuais que são conteúdos não-judicáveis. Assim a
aplicação dessa substituição nesses casos implicaria expressões não-bem-
formadas.

2.3.2. Axiomas do sistema

As seguintes fórmulas são os axiomas de BS/GLA:



³⁷ Posteriormente, no sistema de GGA, devido às mudanças engendradas pela distinção en-
tre sentido e referência, pela nova interpretação do traço de conteúdo como horizontal que
agora se refere a um conceito e pela introdução dos valores de verdade como objetos, Frege
substitui nesse caso a expressão “ $f\xi$ ” por “ ξ ”. Mas, recentemente, em discussão no gru-
po de estudo sobre GGA, Rafael Serra chamou minha atenção para o fato de Frege ainda
precisar substituir “ $f\xi$ ” por “ ξ ” em alguns casos. Pretendemos em breve escrever sobre isso.

³⁸ Como já mencionado:
 $a \supset (b \supset a)$

³⁹
 $(a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$

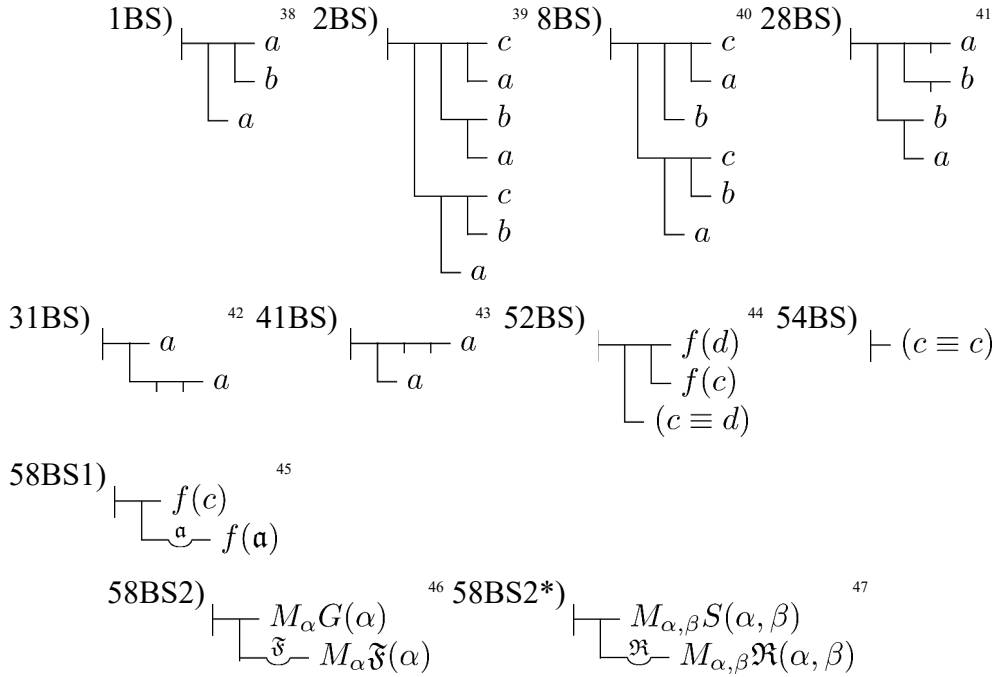
⁴⁰
 $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$

⁴¹
 $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$

⁴²
 $\neg\neg a \supset a$

⁴³
 $a \supset \neg\neg a$

⁴⁴
 $(c \equiv d) \supset (F(c) \supset F(d))$



Algumas observações são necessárias. Em geral as seis primeiras fórmulas são consideradas como parte da lógica proposicional do sistema fregeano, enquanto a adição de 52BS, 54BS e 58BS1 produz um sistema de lógica de predicados de primeira ordem com identidade. A adição de 58BS2 e 58BS2* produz uma lógica de predicados de segunda ordem. Todavia, isso não é completamente correto. A lógica de Frege é uma lógica de termos. O objetivo de Frege é promover uma unificação entre proposições primárias e proposições secundárias booleanas⁴⁸. Nesse sentido, 52BS e 54BS constitu-

³⁸ Como já mencionado:
 $a \supset (b \supset a)$

³⁹
 $(a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$

⁴⁰
 $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$

⁴¹
 $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$

⁴²
 $\neg \neg a \supset a$

⁴³
 $a \supset \neg \neg a$

⁴⁴
 $(c \equiv d) \supset (F(c) \supset F(d))$

⁴⁵
 $\forall x f(x) \supset f(c)$

⁴⁶
 $\forall F M_x F(x) \supset M_x G(x)$

⁴⁷
 $\forall R M_{xy} R(x, y) \supset M_{xy} S(x, y)$

⁴⁸ Esse ponto é bastante enfatizado no artigo não publicado “Booles rechenende Logik und die Begriffsschrift”. Cf. FREGE, 1983b.

em parte da “lógica proposicional” de Frege. Há evidências para sustentar essa posição. Mas, antes, gostaria de mencionar uma outra fórmula diretamente derivada de 52BS:

$$(57BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \begin{array}{l} f(c) \\ f(d) \end{array} \\ (c \equiv d) \end{array} \end{array}$$

No prefácio de BS, Frege sustentou que ele poderia ter introduzido a fórmula

$$(IVb) \quad \vdash (\top\top a \equiv a)^{49}$$

e eliminado do sistema 31BS e 41BS como axiomas. Como isso poderia ser executado? A interpretação que sugeri em diversos lugares é considerar versões “proposicionais” de 52BS e 57BS, substituindo-se nessas fórmulas “ c ” por “ $\top\top a$ ”, “ d ” por “ a ” e “ $f\xi$ ” por “ ξ ”, o que resultaria

$$\begin{array}{cc} 52BS' & \text{e } 57BS' \\ \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \begin{array}{l} a \\ \top\top a \end{array} \\ (\top\top a \equiv a) \end{array} & \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \begin{array}{l} a \\ a \end{array} \\ (\top\top a \equiv a) \end{array} \end{array} \end{array}$$

Agora basta aplicar a regra de *modus ponens* para se obter, respectivamente, 31BS e 41BS como teoremas. O procedimento que acabei de relatar é, de fato, o procedimento que Frege executa nas provas a partir das definições, as quais são construídas por meio da identidade de conteúdo. Como já mencionado, Frege pretendia obter os respectivos condicionais entre *definiens* e *definiendum* das definições. E para isso ele usou essas versões “proposicionais” de 52BS e 57BS. Em particular, reivindico que o seguinte vale no sistema BS/GLA em caso de “ c ” e “ d ” expressarem conteúdos judicáveis

$$\begin{array}{cc} 52BS^* & \text{e } 57BS^* \\ \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \begin{array}{l} d \\ c \end{array} \\ (c \equiv d) \end{array} & \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \begin{array}{l} c \\ d \end{array} \\ (c \equiv d) \end{array} \end{array} \end{array}$$

52BS* e 57BS* assemelham-se às leis de eliminação da bi-implicação do cálculo proposicional. Contudo, as semelhanças param nisso. Como se sabe, o seguinte vale na lógica proposicional:

⁴⁹ Essa fórmula é um análogo do teorema IVb de GGA. Como foi mostrado em Duarte (2009), essa fórmula não é derivável no sistema de BS, embora Frege acredite que ela seja verdadeira.

$$(\text{Introd. } \leftrightarrow): (c \supset d) \wedge (d \supset c) \supset (c \leftrightarrow d).$$

Por outro lado, um análogo de (Introd. $\leftrightarrow$) em termos da identidade de conteúdo

$$(\text{IVa}^*): \begin{array}{l} \vdash (c \equiv d) \\ \vdash \begin{array}{l} \vdash c \\ \vdash d \end{array} \\ \vdash \begin{array}{l} d \\ c \end{array} \end{array}$$

é completamente inaceitável do ponto de vista fregeano. A razão é que o sistema de BS/GLA é intensional por causa dos conteúdos judicáveis, que são entidades próximas às proposições. Assim, é bastante óbvio que duas sentenças podem mutuamente se implicar sem que com isso elas expressem a mesma proposição. Em particular, a introdução de IVa* no sistema de BS/GLA implicará que todas as fórmulas derivadas no sistema expressariam a mesma proposição, o que mina a ideia de Frege de que juízos analíticos podem estender nosso conhecimento.

Como mostrei em Duarte (2009), IVa* é independente dos demais axiomas do sistema, sendo assim não derivável em BS/GLA. Contudo, IVa* parece exercer uma função fundamental na prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita do operador cardinalidade em GLA. Esse fato me levou a conjecturar que Frege não deveria ter uma prova formal do Princípio de Hume em 1884 e, quando ele tentou produzi-la, ele percebeu a necessidade de introduzir algo como IVa* no sistema. Contudo, IVa* é uma fórmula problemática dentro de um sistema intensional como o de BS/GLA. Daí Frege foi forçado a extensionalizar o sistema, o que acarretou as mudanças por volta de 1892, dentro das quais posso citar: 1) distinção entre sentido e referência; 2) introdução do horizontal como conceito; 3) introdução dos valores de verdade como objetos. Essas mudanças permitiram que Frege pudesse introduzir no sistema o axioma IV

$$(\text{IV}) \vdash \begin{array}{l} \vdash (\text{— } a) = (\text{— } b) \\ \vdash (\text{— } a) = (\text{— } b) \end{array}$$

que basicamente afirma que ou o valor de verdade de “— a ” é o mesmo que o valor de verdade de “— b ” ou o valor de verdade de “— a ” é

⁵⁰ Essa fórmula é equivalente a: $(c \supset d) \wedge (d \supset c) \supset (c \equiv d)$.

o mesmo que o valor de verdade de “— b ”. Em suma, axioma assume que há dois valores de verdade – o Verdadeiro e o Falso. A partir do axioma IV, Frege derivou o teorema IVa

$$(IVa) \quad \vdash \begin{array}{l} \text{--- } a = \text{--- } b \\ \quad \vdash \begin{array}{l} \text{--- } a \\ \quad \vdash b \end{array} \\ \quad \vdash b \\ \quad \quad \vdash a \end{array}$$

Na formulação do teorema, o horizontal é fundamental. Em GGA, o horizontal tem função extremamente importante e o uso dele é bastante diferente do traço de conteúdo de BS. Em BS, como foi observado, o traço de conteúdo tem uma função sintática restritiva, anexando-se apenas a termos que expressam conteúdos judicáveis. Em GGA, o horizontal é interpretado como um conceito⁵¹ de acordo com a seguinte regra semântica:

$$\text{--- } \Delta = \begin{cases} V & \text{se } \Delta = V \\ F & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Isso permite que o horizontal possa ser anexado a qualquer termo. Por exemplo, se “2” for um símbolo no sistema de GGA, “— 2” será um termo bem-formado, cuja referência é o Falso. Em BS, “— 2” é uma expressão mal-formada, porque “2” não expressa um conteúdo judicável. Em GGA, o seguinte é uma instância de 1BS

$$\vdash \begin{array}{l} 2 \\ \quad \vdash 2 \\ \quad \quad \vdash 2 \end{array}$$

Por outro lado, em BS, a fórmula acima é igualmente mal-formada. Dada a explicação do horizontal, é possível entender o que o teorema IVa afirma: se dois termos a e b se implicam mutuamente, então o valor de verdade de “— a ” é o mesmo que o valor de verdade de “— b ”. Sem o horizontal no consequente de IVa, essa fórmula seria falsa. Um contraexemplo é:

$$\vdash \begin{array}{l} (2 = 3) \\ \quad \vdash 2 \\ \quad \quad \vdash 3 \\ \quad \quad \quad \vdash 3 \\ \quad \quad \quad \quad \vdash 2 \end{array}$$

⁵¹ A partir de 1892 conceitos são tipos especiais de funções, são funções cujos valores são sempre valores de verdade. Cf. FREGE, 1984, p. 146.

Como já mencionado, em GGA, o teorema IVa desempenha papel essencial na prova do teorema 1 e na prova do Princípio de Hume. Mas ele é usado em muitas outras provas, contudo todos esses usos são não-essenciais. Em particular, o teorema IVa é usado na derivação de uma fórmula central usada na prova de que todo número natural tem um sucessor. Na seção 3, apresentarei uma prova alternativa.

Para facilitar as derivações na seção 3, estipularemos outras regras inferências baseadas nos axiomas e nas fórmulas que são deriváveis a partir dos axiomas. De fato, há evidências que logo depois da publicação de BS em 1879, Frege cogitou introduzir um sistema lógico com mais regras de inferência⁵². Em “*Booles rechenende Logik und die Begriffsschrift*”, Frege (1979, p. 40-45; 1983, p. 46-50) sugeriu as seguintes novas regras:

(CP) Contraposição: de $\begin{array}{|l} \Delta_2 \\ \hline \Delta_1 \end{array}$, inferir $\begin{array}{|l} \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \end{array}$

Essa regra substitui 28BS. De fato, Frege derivou de 28BS alguns teoremas⁵³ que nos permitem generalizar CP.

(CPG) de $\begin{array}{|l} \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array}$, podemos inferir: $\begin{array}{|l} \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array}$ ou $\begin{array}{|l} \Delta_2 \\ \hline \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array}$ ou $\begin{array}{|l} \Delta_2 \\ \hline \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array}$

A ideia é que é possível trocar a posição de qualquer antecedente (subcomponente) com o consequente, introduzindo-se a negação.

Outra regra de inferência que será utilizada é a regra de permutação de antecedentes (subcomponentes):

(Perm) Permutação: de $\begin{array}{|l} \Delta \\ \hline \Delta_1 \\ \hline \Delta_2 \end{array}$, inferir $\begin{array}{|l} \Delta \\ \hline \Delta_2 \\ \hline \Delta_1 \end{array}$

⁵² Isso já é indicado em BS, §6 (FREGE, 2019, p. 46).

⁵³ Fórmulas 29, 30, 33, 34 de BS.

Essa inferência substitui 8BS. Novamente, essa regra pode ser apresentada em uma forma generalizada, a qual representa vários teoremas de BS⁵⁴:

(PermG) de  podemos inferir  ou

A ideia é que qualquer antecedente (subcomponente) pode ser permutado com qualquer outro antecedente (subcomponente).

Outra regra que será introduzida é a de transitividade do condicional. Em BS são provados vários teoremas que representam essa propriedade da implicação:

(Trans) Transitividade: de $\vdash_{\Delta_1}^{\Delta}$ e $\vdash_{\Delta_2}^{\Delta_1}$, inferir $\vdash_{\Delta_2}^{\Delta}$.

Essa regra pode ser generalizada, permitindo que um antecedente de uma fórmula seja substituído pelos antecedentes de uma outra fórmula, cujo consequente é aquele antecedente da primeira fórmula. Exemplo:

$$\text{de} \left| \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array} \right. \text{e} \left| \begin{array}{c} \Delta_1, \text{inferir} \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \Delta \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{array} \right.$$

Outra regra de inferência é a regra de amalgamação de antecedentes idênticos⁵⁵:

$$(\text{Amal}) \text{ de } \begin{array}{|c|} \hline \Delta \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \Delta_1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \Delta_1 \end{array}, \text{inferir } \begin{array}{|c|} \hline \Delta \\ \hline \Delta_1 \end{array}.$$

Essa regra pode ser generalizada.

⁵⁴ Veja fórmulas 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22.

⁵⁵ Outra regra utilizada por Frege é a regra de cancelamento de antecedentes contrários em fórmulas com mesmo consequente. Mas não será feito uso dessa inferência.

2.3.3. Definições das noções aritméticas e alguns teoremas

Em BS, Frege apresentou quatro definições de noções aritméticas e, em GLA, ele introduziu complementarmente definições de zero, de predecessor, de uma relação correlacionar dois conceitos e de uma relação ser um-para-muitos. A noção de número natural é obtida a partir do ancestral fraco da relação predecessor.

A parte 3 de BS inicia com a introdução do conceito de hereditariedade. Uma propriedade F é hereditária numa relação f justamente quando para quaisquer $\mathfrak{d}, \mathfrak{a}$, se $F(\mathfrak{d})$ e $f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$, então $F(\mathfrak{a})$. Na linguagem do sistema, a definição será introduzida da seguinte forma:

$$(\text{Her}) \Vdash \left(\left(\left(\mathfrak{d} \text{---} \mathfrak{a} \text{---} F(\mathfrak{a}) \right) \right) \right) \equiv \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta))$$

O lado esquerdo da definição é o *definiens*, o lado direito é o *definiendum*. O *definiendum* é um novo símbolo que serve de abreviação, a qual será usada na definição de ancestral forte. Como já mencionado, uma vez estipulada a definição, ela é transformada em axioma

$$\vdash \left(\left(\left(\mathfrak{d} \text{---} \mathfrak{a} \text{---} F(\mathfrak{a}) \right) \right) \right) \equiv \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta))$$

a partir do qual se segue os respectivos condicionais (por meio de 52BS* e 57BS*):

$$(\text{Her1}) \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \quad (\text{Her2}) \vdash \left(\left(\mathfrak{d} \text{---} \mathfrak{a} \text{---} F(\mathfrak{a}) \right) \right) \equiv \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta))$$

A segunda definição é a de ancestral forte, que representa o fechamento transitivo de uma relação:

$$(\text{AncFo}) \Vdash \left(\left(\left(\mathfrak{x} \text{---} \mathfrak{y} \text{---} \mathfrak{F}(\mathfrak{y}) \right) \right) \right) \equiv f^*(x, y)$$

Pode-se ler essa definição da seguinte forma: y segue-se após x na relação f justamente quando y tem qualquer propriedade que é hereditária na relação f por meio de aplicação iterada de f a x .

Novamente, essa definição é transformada em axioma, a partir do qual obtemos os seguintes condicionais (por meio de 52BS* e 57BS*):

$$\begin{array}{c}
 \text{(AncFo1)} \quad \begin{array}{c} \vdash f^*(x, y) \\ \vdash \mathfrak{F}(y) \\ \vdash \mathfrak{F}(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(\mathfrak{F}(\alpha), f(\alpha, \beta)) \end{array} \qquad \text{(AncFo2)} \\
 \\
 \begin{array}{c} \vdash \mathfrak{F}(y) \\ \vdash \mathfrak{F}(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(\mathfrak{F}(\alpha), f(\alpha, \beta)) \\ \vdash f^*(x, y) \end{array}
 \end{array}$$

De AncFo2, uma instância de 58BS2 e Trans, é obtida a fórmula 77 de BS

$$\begin{array}{c}
 \text{(77BS)} \quad \begin{array}{c} \vdash F(y) \\ \vdash F(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \\ \vdash f^*(x, y) \end{array}
 \end{array}$$

De Her2, uma instância de 58BS1 e Trans, deriva-se a seguinte fórmula:

$$\begin{array}{c}
 \text{(74BS)} \quad \begin{array}{c} \vdash F(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \\ \vdash F(x) \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \end{array}
 \end{array}$$

De 74BS, 77BS, TransG, PermG e Amal, é derivada a fórmula 81

$$\begin{array}{c}
 \text{(81BS)} \quad \begin{array}{c} \vdash F(y) \\ \vdash f^*(x, y) \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \\ \vdash F(x) \end{array}
 \end{array}$$

A fórmula 81 é uma versão generalizada da indução matemática. A indução matemática para os números naturais é obtida, substituindo-se “ x ” por “ 0 ” e “ $f(\xi, \zeta)$ ” pela relação de predecessor (Pred) que será introduzida mais adiante.

É importante mencionar as seguintes fórmulas

$$(91BS) \vdash \begin{array}{l} f^*(x, y)_{56} \\ \vdash f(x, y) \end{array} \quad (98BS) \vdash \begin{array}{l} f^*(x, z)_{57} \\ \vdash f^*(y, z) \\ \vdash f^*(x, y) \end{array}$$

91BS afirma que se x está na relação f com y , então x é uma ancestral forte de y (ou y vem depois de x na sequência f). 98BS sustenta a transitividade do ancestral: se x é ancestral de y e y é ancestral de z , então x é ancestral de z .

A terceira definição de BS é a de ancestral fraco, que é obtida por meio de um enfraquecimento do ancestral forte:

$$(AncFr) \Vdash \left(\left(\begin{array}{l} y \equiv x \\ \vdash f^*(x, y) \end{array} \right) \equiv f^{**}(x, y) \right)$$

Ou seja, x é ancestral fraco de y (ou y pertence a f -série iniciado por x) justamente quando x é ancestral forte de y ou y é igual a x . Obviamente todo ancestral forte é um ancestral fraco. O ancestral fraco desempenha um papel importante na definição de número natural. Basicamente, x é número natural justamente quando zero é um Pred-ancestral fraco de x . Isto é, ou x é alcançado em algum momento por aplicações sucessivas de Pred ou x é zero.

De AncFr, são obtidos os seguintes condicionais

$$(AncFr1) \vdash \begin{array}{l} f^{**}(x, y) \\ \vdash y \equiv x \\ \vdash f^*(x, y) \end{array} \quad (AncFr2) \vdash \begin{array}{l} y \equiv x \\ \vdash f^*(x, y) \\ \vdash f^{**}(x, y) \end{array}$$

⁵⁶ Em dedução natural, um esboço de prova é o seguinte: assumo que 1) $f(x, y)$. Temos que provar $f^*(x, y)$. Essa fórmula é um condicional universalmente quantificado (segunda ordem). Assim, será assumido para uma F arbitrária que 2) $\text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta))$ e 3) $\forall a(f(x, a) \supset F(a))$. Deve-se derivar $F(y)$. Instancie 3) universalmente. Assim, é obtida 4) $f(x, y) \supset F(y)$. Aplique *modus ponens* entre 1) e 4). Logo, $F(y)$.

⁵⁷ Um esboço de prova é: assumo que 1) $f^*(x, y)$ e 2) $f^*(y, z)$. Tem que ser derivada $f^*(x, z)$. Essa fórmula é um condicional universalmente quantificado (segunda ordem). Portanto, seja uma F arbitrária. Assumo que 3) $\text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta))$ e 4) $\forall a(f(x, a) \supset F(a))$. Deve-se derivar $F(z)$. 1) expressa a fórmula $\forall \mathfrak{f}\{\text{Her}_{\alpha, \beta}(\mathfrak{f}(\alpha), f(\alpha, \beta)) \wedge \forall a(f(x, a) \supset \mathfrak{f}(a)) \supset \mathfrak{f}(y)\}$. Instanciando universalmente, é obtida a fórmula 5) $\text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \wedge \forall a(f(x, a) \supset F(a)) \supset F(y)$. Com duas aplicações de *modus ponens* entre 3) e 4) e 5), obtemos $F(y)$. Mas 3) expressa o seguinte: $\forall a \forall b(F(a) \wedge f(a, b) \supset F(b))$. Instanciando universalmente, é derivada 6) $(F(y) \wedge f(y, w) \supset F(w))$. Mas, uma vez que $F(y)$, então $f(y, w) \supset F(w)$. Generalizando universalmente, deriva-se 7) $\forall a(f(y, a) \supset F(a))$. Contudo 2) expressa a fórmula $\forall \mathfrak{f}\{\text{Her}_{\alpha, \beta}(\mathfrak{f}(\alpha), f(\alpha, \beta)) \wedge \forall a(f(y, a) \supset \mathfrak{f}(a)) \supset \mathfrak{f}(z)\}$. Instanciando universalmente, será obtida a seguinte fórmula: 8) $\text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \wedge \forall a(f(y, a) \supset F(a)) \supset F(z)$. Aplique *modus ponens* duas vezes entre 8), 7) e 3). Logo, $F(z)$.

A quarta e última definição de BS é a de funcionalidade de uma relação:

$$(Func): \Vdash \left(\left(\left(\frac{c \quad b}{c \equiv b} \right) \frac{a}{a} \right) \frac{b \equiv a}{f(c, a)} \right) \equiv Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta)$$

Uma relação f é funcional justamente quando todo indivíduo do domínio está relacionado com no máximo um do contra-domínio. Certamente, são deriváveis os respectivos condicionais:

$$(Func1) \quad \frac{\frac{\frac{c \quad b}{c \equiv b} \quad a}{b \equiv a} \quad f(c, a)}{f(c, b)} \quad Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta) \quad (Func2) \quad \frac{\frac{c \quad b}{c \equiv b} \quad a \quad b \equiv a}{f(c, a)} \quad f(c, b)}{Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta)}$$

De Func2, uma instância de 58BS1 e Trans, é derivada a fórmula

120

$$(120BS) \quad \frac{\frac{\frac{a \equiv x}{a} \quad f(y, a)}{f(y, x)} \quad Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta)}{f(y, x)}$$

Claramente, o seguinte vale

$$(112BS) \quad \frac{f^{**}(x, a)}{a \equiv x}$$

Logo, por transitividade entre 112BS e 120 BS, é obtida

$$(122BS) \quad \frac{\frac{\frac{f^{**}(x, a)}{a} \quad f(y, a)}{f(y, x)} \quad Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta)}{f(y, x)}$$

Por Confl, é derivada

$$(122BS^*) \quad \frac{\frac{\frac{a}{a} \quad f^{**}(x, a)}{f(y, a)} \quad f(y, x)}{Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta)}$$

De 77BS

$$(77BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} F(y) \\ \vdash \begin{array}{l} \alpha \\ \vdash \begin{array}{l} F(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \end{array} \end{array} \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \end{array} \\ \vdash f^*(x, y) \end{array},$$

deriva-se

$$(78BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} F(y) \\ \vdash \begin{array}{l} f^*(x, y) \\ \vdash \begin{array}{l} \alpha \\ \vdash \begin{array}{l} F(\alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \end{array} \end{array} \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \end{array} \end{array},$$

aplicando-se PermG.

Em 78BS, faça as seguintes substituições: “ x ” por “ y ”, “ y ” por “ m ” e “ $F\xi$ ” por “ $f^{**}(x, \xi)$ ”. Assim é obtida a fórmula

$$(78BS^*) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} f^{**}(x, m) \\ \vdash \begin{array}{l} f^*(y, m) \\ \vdash \begin{array}{l} \alpha \\ \vdash \begin{array}{l} f^{**}(y, \alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \end{array} \end{array} \\ \vdash \text{Her}_{\alpha, \beta}(f^{**}(x, \alpha), f(\alpha, \beta)) \end{array} \end{array}$$

O último antecedente afirma que a propriedade de pertencer a f -série iniciada por x é hereditária na relação f , que é justamente a fórmula 109 de BS⁵⁸.

Logo, aplicando *modus ponens*, é obtida

$$(110BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} f^{**}(x, m) \\ \vdash \begin{array}{l} f^*(y, m) \\ \vdash \begin{array}{l} \alpha \\ \vdash \begin{array}{l} f^{**}(y, \alpha) \\ \vdash f(x, \alpha) \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}.$$

De 122BS*, 110BS, Trans, é obtida a fórmula

$$(124BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} f^{**}(x, m) \\ \vdash \begin{array}{l} f^*(y, m) \\ \vdash \begin{array}{l} f(y, x) \\ \vdash \text{Func}_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \end{array} \end{array} \end{array}^{59}.$$

⁵⁸ Eu não apresentarei aqui a derivação conceitográfica de 109BS. $\text{Her}_{\alpha, \beta}(f^{**}(x, \alpha), f(\alpha, \beta))$ é equivalente $\forall \alpha \forall \beta (f^{**}(x, \alpha) \wedge f(\alpha, \beta) \supset f^{**}(x, \beta))$. Assim, para w, z arbitrários, assumo que 1) $f^{**}(x, w)$ e 2) $f(w, z)$. Deve-se mostrar que $f^{**}(x, z)$. De 2), segue-se que 3) $f^*(w, z)$ pelo teorema 91. De 1), segue-se 4) $f^*(x, w) \vee x = w$. Se $f^*(x, w)$, então é derivada 5) $f^*(x, z)$ por transitividade do ancestral forte (98BS). De 5), segue-se diretamente $f^{**}(x, z)$ via regra de introdução da disjunção. Por outro lado, se $x = w$, então derivamos de 3) $f^*(x, z)$ e, portanto, $f^{**}(x, z)$. Logo, $f^{**}(x, z)$.

⁵⁹ Essa fórmula afirma o seguinte: se uma relação f for funcional e y estiver na relação f com x e y for o ancestral forte de m (m vier depois de y na f -sequência), então ou x será ancestral forte de m ou x será igual a m (x será ancestral fraco de m).

Outro teorema derivado em BS e que será usado na prova da seção 3 é a fórmula 102BS, para a qual não darei uma derivação conceitográfica aqui:

$$(102BS) \quad \begin{array}{c} \vdash \\ \begin{array}{c} \vdash f^*(x, v) \\ \vdash f(z, v) \\ \vdash f^{**}(x, z) \end{array} \end{array} \quad ^{60}$$

As quatro definições acima serão agora complementadas com as de GLA. Em primeiro lugar, introduzirei a definição de uma relação ser um-para-muitos:

$$(UpM) \quad \vdash \left(\left(\begin{array}{c} \vdash \text{c} \text{---} \text{b} \vdash \text{a} \vdash \text{c} \equiv \text{a} \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \\ \vdash f(\text{c}, \text{b}) \end{array} \right) \equiv UpM_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \right) \quad ^{61}$$

Em GGA, Frege introduziu a noção de inversa de uma relação. Assim, uma relação f é um-para-muitos quando a sua inversa é funcional. Mas prefiro seguir o procedimento de GLA.

Obviamente, é desejável derivar os respectivos condicionais, usando 52BS* e 57BS*

$$(UpM1) \quad \begin{array}{c} \vdash UpM_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \\ \vdash \text{c} \text{---} \text{b} \vdash \text{a} \vdash \text{c} \equiv \text{a} \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \\ \vdash f(\text{c}, \text{b}) \end{array} \quad (UpM2) \quad \begin{array}{c} \vdash \text{c} \text{---} \text{b} \vdash \text{a} \vdash \text{c} \equiv \text{a} \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \\ \vdash f(\text{c}, \text{b}) \\ \vdash UpM_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \end{array} .$$

Em GGA, Frege derivou que a relação de predecessor, que será definida adiante, é um-para-muitos. A partir dessa propriedade, Frege inferiu a seguinte fórmula:

$$(143GGA) \quad \begin{array}{c} \vdash \\ \begin{array}{c} \vdash Pred^{**}(b, d) \\ \vdash Pred^*(b, a) \\ \vdash Pred(d, a) \end{array} \end{array}$$

que é diretamente derivada de

⁶⁰ Se x for ancestral fraco de z e z estiver na relação f com v , então x é ancestral forte de v . Em dedução natural, um esboço de derivação é o seguinte: assumo que 1) $f^{**}(x, z)$ e 2) $f(z, v)$. Pela definição de ancestral fraco, de 1) segue-se 3) $f^*(x, z) \vee x = z$. De 2), 91BS $f(z, v) \supset f^*(z, v)$ e *modus ponens*, segue-se 4) $f^*(z, v)$. Se 5) $f^*(x, z)$, então, por causa da transitividade do ancestral forte, temos $f^*(x, v)$. Se $x = z$, então $f^*(x, v)$. Portanto, $f^*(x, v)$.

⁶¹ Cf. FREGE, 1988, §72.

$$(143\text{GGA}^*) \vdash \begin{array}{l} \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \vdash \text{Pred}^*(b, a) \\ \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \vdash \text{UpM}_{\alpha\beta}\text{Pred}(\alpha, \beta) \end{array} .$$

Essa fórmula guarda alguma similaridade com 124BS. A derivação dessa proposição é muito longa e ela não depende essencialmente do teorema IVa. Por falta de espaço, não darei essa derivação aqui⁶².

Outra noção importante introduzida em GLA é a de uma relação correlacionar dois conceitos. De acordo com Frege (1988, §71), uma relação f correlaciona dois conceitos F e G justamente quando para todo objeto x , se x é F , então existe um objeto y tal que y é G e $f(x, y)$ e para todo objeto x se x é G , então existe um objeto y tal que y é F e $f(y, x)$:

$$(\text{Corr}) \Vdash \left(\left(\left(\begin{array}{c} \text{a} \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array} \right) \equiv \text{Corr}_{\alpha\beta}(f\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \right) \right)^{63}$$

Novamente, deseja-se derivar os respectivos condicionais

$$\begin{array}{ll} (\text{Corr1}) \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(f\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) & (\text{Corr2}) \vdash \begin{array}{l} \text{a} \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array} \\ \vdash \begin{array}{l} \text{a} \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array} & \vdash \begin{array}{l} \text{b} \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array} \\ \vdash \begin{array}{l} \text{b} \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array} & \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(f\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \end{array}$$

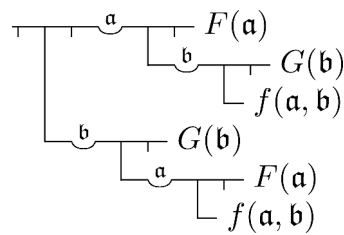
De (Corr1), segue-se

$$(\text{Corr3}) \vdash \begin{array}{l} \text{Corr}_{\alpha\beta}(f\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \\ \text{a} \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \\ \text{b} \\ \vdash G(\text{b}) \\ \vdash F(\text{a}) \\ \vdash f(\text{a}, \text{b}) \end{array}$$

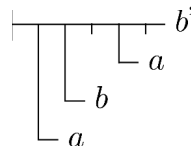
Vale mencionar que a fórmula

⁶² A derivação é executada por indução matemática.

⁶³ Cada membro da conjunção está na sua respectiva contrapositiva.



é uma conjunção. Mas é derivável de 1BS a seguinte fórmula



que justifica a derivação de (Corr3).

Agora já é possível introduzir o Princípio de Hume. Como sustentei em Duarte (2009, 2022), uma vez que Frege não pode ter a fórmula (IVa*) no sistema, ele não poderia derivar o Princípio de Hume a partir da definição explícita em termos de extensão de conceitos. Assim, conjecturei, e ainda mantenho essa posição, que, muito provavelmente, Frege tenha introduzido o Princípio de Hume como um novo axioma do sistema ou como um novo tipo de definição, que ele chamou de juízo de reconhecimento⁶⁴. Além disso, há a seguinte nota de Scholz⁶⁵ sobre um manuscrito de Frege, datado como posterior a 1884:

N 47* (Frühe Bemerkungen zur Definition von „Anzahl, die einem Begriff zukommt“.)

6 Seiten Quart. Nach 1884 (Rückseite (10)). Es wird insbesondere versucht, die „Anzahl, die einem Begriff zukommt“, ohne Verwendung von Begriffsumfängen zu definieren.

[Der Wortlaut von N 47 steht auf einem Zettel, mit dem folgender anderer Text überklebt wurde, der zuvor unter der Überschrift „(1) Zu den ‚Grundlagen‘“ stand:]

N 47 (Kritische Fragen zu „Grundlagen“ §§ 63 – 69)

a) „Ist es nötig, die Zahlengleichheit als strenge Identität zu fassen?“ b) „Ist es möglich, einen beurteilbaren Inhalt, der $N_{\tau}F(\tau)$ ¹ enthält, dadurch zu definieren, dass man

⁶⁴ Esse ponto seria discutido no escrito póstumo chamado *Logik*, escrito entre 1879 e 1891. Esse escrito é anterior a 1891, uma vez que Frege usa o termo conteúdo judicável (*Beurteilbarer Inhalt*). Eu situaria esse escrito entre 1881 a 1884, porque Frege claramente pretendia discutir um novo tipo de definição de objetos, que é justamente a introdução de objetos via princípio de abstração. Cf. FREGE, 1983a, p. 1.

⁶⁵ Scholz ficou responsável pelo *Nachlass* de Frege. Com início da segunda guerra, ele depositou os arquivos na biblioteca da Universidade de Münster, a qual foi bombardeada. Esses escritos foram dados como perdidos. Por sorte, Scholz fez algumas cópias desses manuscritos e notas classificatórias e descritivas dos conteúdos.

sagt, er dürfe sich nicht ändern, wenn F durch G ersetzt wird, sobald $F(\varrho) \asymp_{\varrho} G(\varrho)$ gilt“ <c) (Die Schwierigkeit der Definition eines Gegenstandes durch ein Wiedererkennungsurteil).> 6 Spalten Quart. Nach 1884 (Rückseite (10)) b) enthält Ausführ[un]gen üb. d. Def. Von Gegenständen u. eine frühe Ausführg. der Def. eines Begriffsumfanges.
[Hierzu gehörte folgende Anmerkung:] 1) $< N_{\tau}F(\tau)$ ist eine frühe symbolische Darstellung von Kardinalzahl von F.> (VERAART, 1976, p. 95).

N 47* (Observações iniciais sobre a definição de “número cardinal que pertence a um conceito”).

6 páginas e um quarto. Depois de 1884 (Parte detrás (10)). Em particular tenta-se definir o “número cardinal que pertence a um conceito” sem o emprego de extensões de conceito.

[O teor de N 47 encontra-se em um pedaço de papel colado sobre o seguinte outro texto previamente intitulado “(1) Sobre os ‘Fundamentos’”:]

N 47 (Questões críticas sobre “Fundamentos” §§63 – 69)

a) “É necessário compreender a identidade numérica como uma identidade estrita?” b) “é possível definir um conteúdo judicável contendo $N_{\tau}F(\tau)$ ¹, afirmando que este conteúdo não pode mudar se F for substituído por G, à medida que $F(\varrho) \asymp_{\varrho} G(\varrho)$ vale?” <c) (As dificuldades da definição de um objeto por meio de um juízo de reconhecimento).>. 6 colunas e um quarto. Depois de 1884 (Parte detrás (10)) b) contém explicações sobre def. de objetos e uma primeira explicação da definição de uma extensão de conceito. [Aqui incluía a seguinte nota]: 1) $N_{\tau}F(\tau)$ é uma primeira representação simbólica de número cardinal de F>

Não é claro se a datação no inverso da folha é de Frege ou Scholz. Se a datação é de Frege, isso seria no mínimo estranho, pois esse manuscrito discutiria temas que já foram examinados nos *Fundamentos da Aritmética* (§§ 63-69). Conforme mencionei em 2009, provavelmente este manuscrito é de um período entre 1882 e 1884. Nesse período, seguindo a sugestão de Stumpf⁶⁶, Frege começou a redigir uma introdução ao livro mencionado na carta a Marty. Essa introdução tornar-se-ia GLA. Note que na nota 47 já há notação simbólica para o functor “o número de...” ($N_{\tau}F(\tau)$) e para a relação de correspondência 1-1 entre os conceitos F e G ($F(\varrho) \asymp_{\varrho} G(\varrho)$). É interessante notar que há uma tentativa de definição desse functor sem usar extensões. Ao que parece, Frege pretendia introduzir o Princípio de Hume inicialmente como primitivo, mas, devido ao Problema de Júlio César, ele

⁶⁶ Cf. FREGE, 1976, p. 256-7.

recuou. Outro ponto estranho na nota é essa tentativa de definir uma extensão. Essa suposta definição seria o axioma V? Enfim, acredito que há razões suficientes para introduzir o Princípio de Hume como primitivo no sistema BS/GLA:

$$(PH) \Vdash \left((\#_x F(x) \equiv \#_x G(x)) \equiv \neg \mathfrak{R} \left[\begin{array}{l} \neg \text{Corr}_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \\ \neg \text{Func}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \neg \text{UpM}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right] \right)$$

PH afirma: o número que pertence a F é o mesmo que o número que pertence a G justamente quando existe uma relação $\mathfrak{R}$ que é funcional, que é um-para-muitos e que correlaciona os F s e os G s. Obviamente, deseja-se derivar os respectivos condicionais:

$$(PH1) \vdash \left[\begin{array}{l} \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \neg \mathfrak{R} \left[\begin{array}{l} \neg \text{Corr}_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \\ \neg \text{Func}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \neg \text{UpM}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right] \end{array} \right] (PH2) \vdash \left[\begin{array}{l} \neg \mathfrak{R} \left[\begin{array}{l} \neg \text{Corr}_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \\ \neg \text{Func}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \neg \text{UpM}_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right] \\ \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \end{array} \right]$$

PH1) é uma versão do teorema 32 de GGA e (PH2) é uma versão do teorema 49 de GGA. Introduzindo PH no sistema, ambas as fórmulas são derivadas, usando apenas 52BS* e 57BS*. De (PH1) facilmente é obtida a fórmula:

$$(PH3) \vdash \left[\begin{array}{l} \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \neg \text{Func}_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \\ \neg \text{UpM}_{\alpha\beta}f(\alpha, \beta) \\ \neg \text{Corr}_{\alpha\beta}(f\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \end{array} \right] .^{67}$$

PH3) será usada na derivação da seção 3.

Restam ainda três definições. A primeira é a da relação predecessor:

$$(Pred) \Vdash \left(\left(\left(\neg \mathfrak{F} \neg \alpha \left[\begin{array}{l} \neg \#_x \mathfrak{F}(x) \equiv n \\ \neg \mathfrak{F}(\alpha) \\ \neg \#_x \left(\neg \mathfrak{F}(x) \right) \equiv m \end{array} \right] \right) \right) \right) \equiv Pred(m, n)$$

Ou seja, m precede n justamente quando há uma propriedade $\mathfrak{F}$ e um indivíduo α tal que α é $\mathfrak{F}$ e o número que pertence à propriedade $\mathfrak{F}$ é n e o número que pertence a propriedade *cair sob* $\mathfrak{F}$, mas não ser α é m .

A segunda definição é a do número cardinal zero:

⁶⁷ Aplique contraposição, use uma versão de 58BS2*, transitividade e, depois, aplique novamente contraposição.

⁶⁸ Novamente, os respectivos condicionais podem ser derivados.

$$(Zero) \Vdash (\#_x(\neg x \equiv x) \equiv 0)$$

Isto é: zero é o número que pertence à propriedade *ser diferente de si mesmo*.

A terceira é a definição de número natural. De acordo com Frege, n é um número natural justamente quando 0 é Pred-ancestral fraco de n (ou n pertence à Pred-série iniciada por 0). A ideia basicamente é que, partindo de 0 e aplicando a relação sucessor iteradamente, alcancemos n em algum momento. A definição é dada pela seguinte fórmula:

$$(Nat) \Vdash [Pred^{**}(0, n) \equiv Nat(n)]$$

Os seguintes condicionais são derivados:

$$(Nat1) \vdash \begin{array}{l} Nat(n) \\ \quad \vdash Pred^{**}(0, n) \end{array} \qquad (Nat2) \vdash \begin{array}{l} Pred^{**}(0, n) \\ \quad \vdash Nat(n) \end{array}$$

Para finalizar essa seção, mencionarei aqui alguns resultados importantes que serão usados nas derivações na seção 3, mas que não provarei aqui por falta de espaço. Essas provas foram feitas em Duarte (2009, cap. 4). Nenhuma delas depende essencialmente do teorema IVa.

- I. a relação de identidade é funcional e um-para-muitos
- II. a relação de predecessor é funcional e um-para-muitos⁶⁹
- III. zero é número natural
- IV. zero não é precedido por qualquer número⁷⁰.

3. DERIVAÇÃO DO TEOREMA 149 DE GGA NA ARITMÉTICA DE FREGE

Em GLA, §§82-3, Frege apresentou o esboço de prova do teorema de que todo número natural tem sucessor⁷¹. De acordo com ele, assumindo

⁶⁹ Em GGA, Frege usou o teorema IVa nessas derivações, mas esse uso não é essencial. Veja Duarte (2009, cap. 4).

⁷⁰ Esse teorema é usado na prova por indução de que se 1) a é número natural, então a não é ancestral forte de a . Isso é provado mostrando que i) zero não ancestral forte de zero e que ii) se d é número natural e d não é ancestral forte de d e d precede a , então a não é ancestral forte de a . Por indução, segue-se que se a é número natural, a não é ancestral forte de a . Para derivar i), precisa-se do fato de que zero não é precedido por qualquer número natural. Essas derivações são longas e elas não dependem essencialmente de IVa.

⁷¹ Boolos e Kimberly Heck (1998) problematizaram a prova de Frege em GLA, §§82-3. Mas o ponto lá é diferente do que eu discuti aqui.

que n é um natural, basta derivar que n precede o número que pertence à propriedade *pertencer à Pred-série que termina em n* ⁷². Isso é provado em GLA por indução matemática. Tem de ser derivado as seguintes proposições:

1. $\text{Pred}(\emptyset, \#_x \text{Pred}^{**}(x, \emptyset))$ ⁷³;
2. se d é número natural e $\text{Pred}(d, \#_x \text{Pred}^{**}(x, d))$ e $\text{Pred}(d, a)$, então $\text{Pred}(a, \#_x \text{Pred}^{**}(x, a))$

Em GLA, §83, Frege mencionou a necessidade de derivar o teorema 149 de GGA a fim de executar a prova de 2). O teorema 149 é a seguinte fórmula

$$(149) \quad \begin{array}{l} \vdash \\ \vdash \\ \vdash \end{array} \#_x(Pred^{**}(x, d)) \equiv \#_x \left(\begin{array}{l} \neg x \equiv a \\ Pred^{**}(x, a) \end{array} \right)$$

(149) afirma o seguinte: se a é número natural e d precede a , então o número que pertence ao conceito *pertencer a Pred-série terminada em d* é igual ao número do conceito *pertencer à Pred-série terminada em a , mas não ser a* .

Em GGA, o teorema IVa é usado na prova do teorema 149. Basicamente, o que Frege fez foi o seguinte: sob as hipóteses afirmadas nos antecedentes, Frege derivou que esses dois conceitos são extensionais. A partir daí, ele aplicou o teorema 96 de GGA

$$(96\text{GGA}) \quad \vdash \frac{\mathcal{H}u = \mathcal{H}v}{\mathcal{A}(\neg \mathcal{A} \cap v) = (\neg \mathcal{A} \cap v)}$$

e obteve a identidade numérica. (96GGA) afirma que se dois conceitos u e v são coextensionais, então o número de u é igual ao número de v .

Na linguagem da Aritmética de Frege, (96GGA) poderia ser traduzida pela seguinte fórmula:

⁷² Intuitivamente, a ideia por trás é bem simples. Tome a noção “pertencer à Pred-série terminada em n ” como “é menor ou igual a n ”. Claramente, sob o conceito “ser menor que zero ou ser zero” cai um único objeto que é o próprio zero. Logo, o número que pertence a esse conceito é um, que é sucessor de zero. Sob o conceito “ser menor que um ou igual a um” caem dois objetos, o número zero e o número um. Logo, o número desse conceito será dois e dois é sucessor de um, e assim por diante.

⁷³ A derivação dessa proposição em GGA – fórmula 154 de GGA – depende da fórmula 97, que, por sua vez, depende da fórmula 96, que é dependente do teorema IVa. Em Duarte (2009) não havia percebido esse fato. Portanto, apresento parte da prova no apêndice.

$$(96BS) \quad \begin{array}{l} \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \cdot \\ \quad \vdash_a (F(a) \equiv G(a)) \end{array}$$

É interessante mencionar que (96BS) é derivável na Aritmética de Frege⁷⁴, contudo ela é completamente inútil, porque não há maneira de descartar o antecedente, uma vez que (IVa*) não está disponível no sistema.

Desse fato podemos inferir com algum grau de certeza de que a prova do teorema mencionado em GLA, §§82-3 era diferente daquela que ocorre em GGA. Na próxima subseção, sugiro como seria essa derivação.

3.1 A derivação

Assuma a seguinte versão de (AncFr2)

$$1) \quad \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash Pred^{**}(b, a) \cdot \\ \quad \vdash Pred^*(b, a) \end{array}$$

Aqui “*f*” foi instanciada para “Pred” e foi aplicada a regra de permutação. Aplique contraposição em 1)

$$2) \quad \begin{array}{l} \vdash Pred^*(b, a) \cdot \\ \quad \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash Pred^{**}(b, a) \end{array}$$

Assuma 143GGA

$$\begin{array}{l} \vdash Pred^{**}(b, d) \cdot \\ \quad \vdash Pred^*(b, a) \cdot \\ \quad \vdash Pred(d, a) \end{array}$$

Por transitividade, é derivada a fórmula

$$3) \quad \begin{array}{l} \vdash Pred^{**}(b, d) \cdot \\ \quad \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash Pred^{**}(b, a) \\ \quad \vdash Pred(d, a) \end{array}$$

Por contraposição, é obtida

$$4) \quad \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \cdot \\ \quad \vdash Pred^{**}(b, a) \\ \quad \vdash Pred^{**}(b, d) \\ \quad \vdash Pred(d, a) \end{array}$$

Seja a seguinte instância de 58BS1

⁷⁴ Veja Duarte (2009, apêndice 2).

$$5) \begin{array}{l} \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \quad \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash a \text{ Pred}^{**}(a, d) \\ \quad \vdash a \equiv b \end{array} \cdot$$

Uma vez que $\vdash b \equiv b$, aplique *modus ponens*. Portanto,

$$6) \begin{array}{l} \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \quad \vdash a \text{ Pred}^{**}(a, d) \\ \quad \vdash a \equiv b \end{array} \cdot$$

Aplique transitividade entre 4) e 6). Assim,

$$7) \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \quad \vdash a \text{ Pred}^{**}(a, d) \\ \quad \vdash a \equiv b \\ \vdash \text{Pred}(d, a) \end{array} \cdot$$

Generalize universalmente

$$8) \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \quad \vdash a \text{ Pred}^{**}(a, d) \\ \quad \vdash a \equiv b \\ \vdash \text{Pred}(d, a) \end{array} \cdot$$

Considere a seguinte instância de 102BS

$$9) \begin{array}{l} \vdash \text{Pred}^*(b, a) \\ \quad \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \quad \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \end{array}$$

e a seguinte instância de (57BS**)

$$10) \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash \text{Pred}^*(b, a) \\ \quad \vdash \text{Pred}^*(a, a) \end{array} \cdot^{75}$$

Aplique transitividade entre 9) e 10). Logo,

$$11) \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \quad \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \quad \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \quad \vdash \text{Pred}^*(a, a) \end{array} \cdot$$

Em GGA, Frege prova por indução matemática o seguinte teorema

⁷⁵ Essa fórmula é obtida por contraposição em (57BS).

$$12) \begin{array}{l} \vdash \vdash \text{Pred}^*(a, a) \\ \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(0, a) \end{array} .$$

A derivação desse teorema não depende essencialmente do teorema IVa, contudo ela é longa e por falta de espaço não a reproduzirei aqui. 12) afirma que se a é número natural, então a não é Pred-ancestral forte de a ⁷⁶.

De 11) e 12), por meio de transitividade, é derivada a fórmula

$$13) \begin{array}{l} \vdash \vdash \vdash b \equiv a \\ \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \vdash \vdash \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(0, a) \end{array} .$$

Seja a seguinte instância de IBS*⁷⁷

$$14) \begin{array}{l} \vdash \vdash \vdash b \equiv a \\ \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \vdash \vdash \vdash b \equiv a \\ \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \end{array} .$$

De 13) e 14), por transitividade, é derivada a fórmula

$$15) \begin{array}{l} \vdash \vdash \vdash \vdash b \equiv a \\ \vdash \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \vdash \vdash \vdash \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \vdash \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \vdash \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(0, a) \\ \vdash \vdash \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \end{array} .$$

Seja a seguinte instância do teorema 108BS⁷⁸

$$16) \begin{array}{l} \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \vdash \vdash \text{Pred}(d, a) \\ \vdash \vdash \text{Pred}^{**}(b, d) \end{array} .$$

Aplicando transitividade e amalgamação de subcomponentes entre 15) e 16), obtemos a fórmula

⁷⁶ Para provar esse teorema temos que derivar as seguintes proposições: 1) zero não é Pred-ancestral forte de zero. A prova depende do fato de zero não ser sucessor de qualquer número; 2) se d é número natural e $\text{Pred}(d, a)$ e d não é Pred-ancestral forte de d , então a não é Pred-ancestral forte de a .

⁷⁷ IBS* é derivada diretamente de IBS da seguinte forma. Seja a seguinte instância de IBS $\vdash \vdash a$. Aplique a regra de amalgamação. Assim, temos i) $\vdash \vdash a$. Uma instância de i) é $\vdash \vdash a$.

$\vdash \vdash b$. Aplique contraposição nessa fórmula: ii) $\vdash \vdash \vdash b$. $\vdash \vdash \vdash a$. $\vdash \vdash \vdash b$. $\vdash \vdash \vdash a$.

⁷⁸ Essa fórmula é consequência direta de 102BS, via introdução da disjunção e aplicação de transitividade.

[illegible]

Aplicando contraposição em 17), temos

18) $\begin{array}{l} \text{---} Pred^{**}(b, d) \\ \text{---} b \equiv a \\ \text{---} Pred^{**}(b, a) \\ \text{---} Pred(d, a) \\ \text{---} Pred^{**}(0, a) \end{array}$

Seja a seguinte instância de 58BS1

$$19) \left\{ \begin{array}{l} b \equiv a \\ \text{Pred}^{**}(b, a) \\ b \equiv b \\ \mathfrak{b} \equiv a \\ \text{Pred}^{**}(\mathfrak{b}, a) \\ b \equiv \mathfrak{b} \end{array} \right.$$

Como $\vdash b \equiv b$, aplique modus ponens. Portanto,

$$\begin{array}{l}
20) \quad \begin{array}{l} \vdash b \equiv a \\ \vdash \text{Pred}^{**}(b, a) \\ \vdash \text{b} \equiv a \\ \vdash \text{Pred}^{**}(\text{b}, a) \\ \vdash b \equiv \text{b} \end{array}
\end{array}$$

Aplicando transitividade entre 18) e 20), derivamos a fórmula

$$21) \quad \begin{array}{l} \text{Pred}^{**}(b, d) \\ \quad \text{b} \equiv a \\ \quad \text{Pred}^{**}(\mathbf{b}, a) \\ \quad \quad \text{b} \equiv \mathbf{b} \\ \quad \text{Pred}(d, a) \\ \quad \text{Pred}^{**}(0, a) \end{array}$$

Aplicando (Conf1) a 21, a seguinte fórmula é obtida

$$22) \quad \begin{array}{l} | \text{--- } a \text{ --- } Pred^{**}(a, d) \\ | \qquad | \text{--- } b \text{ --- } b \equiv a \\ | \qquad | \qquad | \text{--- } Pred^{**}(b, a) \\ | \qquad | \qquad | \text{--- } a \equiv b \\ | \qquad | \text{--- } Pred(d, a) \\ | \text{--- } Pred^{**}(0, a) \end{array}$$

Seja a seguinte instância de (Corr3)

$$\begin{array}{l}
 23) \\
 \begin{array}{l}
 \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\text{Pred}^{**}(\alpha, d), \vdash \beta \equiv a \right. \\
 \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(\beta, a) \right) \\
 \quad \vdash \text{b} \equiv a \\
 \quad \quad \vdash \text{Pred}^{**}(\text{b}, a) \\
 \quad \quad \vdash \text{a} \equiv \text{b} \\
 \quad \quad \quad \vdash \text{Pred}^{**}(\text{a}, d) \\
 \quad \quad \quad \vdash \text{a} \equiv \text{b} \\
 \quad \quad \quad \vdash \text{Pred}^{**}(\text{a}, d) \\
 \quad \quad \quad \vdash \text{b} \equiv a \\
 \quad \quad \quad \quad \vdash \text{Pred}^{**}(\text{b}, a) \\
 \quad \quad \quad \quad \vdash \text{a} \equiv \text{b}
 \end{array}
 \end{array}$$

Aplicando transitividade entre 8), 22) e 23), obtemos a fórmula

$$\begin{array}{l}
 24) \\
 \begin{array}{l}
 \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\text{Pred}^{**}(\alpha, d), \vdash \beta \equiv a \right. \\
 \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(\beta, a) \right) \\
 \quad \vdash \text{Pred}(d, a) \\
 \quad \vdash \text{Pred}^{**}(0, a)
 \end{array}
 \end{array}$$

Seja a seguinte instância de (PH3)

$$\begin{array}{l}
 25) \\
 \begin{array}{l}
 \vdash \#_x(\text{Pred}^{**}(x, d)) \equiv \#_x \left(\vdash x \equiv a \right. \\
 \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(x, a) \right) \\
 \quad \vdash \text{Func}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\
 \quad \vdash \text{UpM}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\
 \quad \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\text{Pred}^{**}(\alpha, d), \vdash \beta \equiv a \right. \\
 \quad \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(\beta, a) \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Uma vez que Pred é funcional e um-para-muitos, aplique modus ponens. Portanto,

$$\begin{array}{l}
 26) \\
 \begin{array}{l}
 \vdash \#_x(\text{Pred}^{**}(x, d)) \equiv \#_x \left(\vdash x \equiv a \right. \\
 \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(x, a) \right) \\
 \quad \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\text{Pred}^{**}(\alpha, d), \vdash \beta \equiv a \right. \\
 \quad \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(\beta, a) \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Agora aplique a transitividade entre 24) e 26). Assim,

$$\begin{array}{l}
 27) \\
 \begin{array}{l}
 \vdash \#_x(\text{Pred}^{**}(x, d)) \equiv \#_x \left(\vdash x \equiv a \right. \\
 \quad \left. \vdash \text{Pred}^{**}(x, a) \right) \\
 \quad \vdash \text{Pred}^{**}(0, a) \\
 \quad \vdash \text{Pred}(d, a)
 \end{array}
 \end{array}$$

Uma vez que

$$\begin{array}{l}
 28) \\
 \vdash \text{Pred}^{**}(\emptyset, n) \\
 \vdash \text{Nat}(n)
 \end{array}$$

segue-se que

$$29) \quad \begin{array}{l} \vdash \#_x(Pred^{**}(x, d)) \equiv \#_x \left(\begin{array}{l} \top x \equiv a \\ \vdash Pred^{**}(x, a) \end{array} \right) \\ \quad \vdash Nat(a) \\ \quad \vdash Pred(d, a) \end{array}$$

CONCLUSÃO

No presente artigo, discuti como seria uma possível derivação do teorema 149 de GGA dentro da Aritmética de Frege, que é a teoria obtida quando se adiciona o Princípio de Hume ao sistema lógico de BS/GLA. Como foi visto, em GGA, esse teorema é provado, usando-se o teorema 96 que afirma que conceitos coextensionais têm o mesmo número cardinal. Embora a fórmula 96GGA seja derivável na Aritmética de Frege, ele é completamente inútil, uma vez que não há no sistema modo de introduzir a identidade de conteúdo a partir de implicação mútua.

A não-derivabilidade de (IVa*) levanta a questão se as provas em GGA são possível na Aritmética de Frege, uma vez que Frege usou em algumas derivações o teorema IVa. Como indiquei, deve-se distinguir dois usos desse teorema em GGA: i) uso essencial, como no caso da derivação do teorema 1 de GGA e no caso da derivação de um dos condicionais do Princípio de Hume (teorema 32 de GGA); ii) uso não-essencial, que é justamente o caso da prova de 149GGA e da fórmula 126 de GGA (veja apêndice).

Para sustentar a afirmação em ii), apresentei na seção 3 uma derivação alternativa de 149GGA e no apêndice uma derivação alternativa de 126GGA. Muito provavelmente Frege seguiu essa linha de derivação no livro de 1882, que foi mencionado na carta a Marty.

A possibilidade dessas derivações alternativas dentro da Aritmética de Frege corrobora com a hipótese defendida no artigo, segunda a qual Frege cogitou em 1882 estabelecer o Princípio de Hume como primitivo no sistema. A rejeição desse princípio por causa do Problema de Júlio César foi um ato tardio que ocorreu quando ele escrevia GLA que seria uma espécie de introdução ao livro de 1882. Esse fato explicaria o porquê Frege era tão reticente em relação às extensões de conceito em GLA.

Recebido em 29/04/2023

Aprovado em 14/05/2023

REFERÊNCIAS

BOOLOS, G; KIMBERLY HECK, R. Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-3. IN: BOOLOS, G. *Logic, logic, and logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1998, p. 315-33.

DUARTE, A. B. *Lógica e aritmética na filosofia da matemática de Gottlob Frege*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.

DUARTE, A. B. Sobre um problema relacionado com a regra de substituição para funções em *Begriffsschrift*. IN: SMITH, P. J. et al. *Crença, verdade, racionalidade: ensaios de filosofia analítica*. Salvador, BA: EDUFBA, 2014, 189-200.

DUARTE, A. B. Sobre as mudanças na conceitografia: papel formal dos valores de verdade. *Princípios*, v. 29, n. 59, p. 71-91, 2022.

FREGE, G. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976.

FREGE, G. Boole's logical calculus and the Concept-script. IN: HERMES, H. et al. *Posthumous writings*. Tradução de Peter Long e Roger White. Oxford: Basil Blackwell, 1979, p. 9-52.

FREGE, G. *Philosophical and mathematical correspondence*. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

FREGE, G. Logik. IN: HERMES, H. et al. *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1983a, p. 1-8.

FREGE, G. Booles rechenende Logik und die Begriffsschrift. IN: HERMES, H. et al. *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1983b, p. 9-52.

FREGE, G. *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy*. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

FREGE, G. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Editado por Christian Thiel. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1988.

FREGE, G. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Editado por Ignacio Angelelli. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1998.

FREGE, G. *Conceitografia: uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da aritmética*. Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie. Rio de Janeiro: Nau Editora, 2019.

LANDINI, G. Frege's cardinals as concept-correlates. *Erkenntnis*, v. 65, p. 207-43, 2006.

LANDINI, G. *Frege's notations: what they are and how they mean*. New York: Palgrave Macmillan, 2012.

VERAART, A. Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges. IN: SCHIRN, M (ed.) Studien zu Frege I: Logik und Philosophie der Mathematik. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag, 1976, p. 49-106.

APÊNDICE

Derivação da fórmula: $\sharp_x \left(\begin{array}{l} \top \sqsubset x \equiv 0 \\ \sqsubset Pred ** (x, 0) \end{array} \right) \equiv 0$

Essa fórmula afirma que o número do conceito *ser o ancestral fraco de zero*, mas não ser zero é igual a zero. A derivação inicia-se assumindo-se a fórmula 126 de GGA

$$i) \vdash \vdash f^*(a, 0)^{79}.$$

Seja a seguinte instância de (AncFR2)

$$ii) \vdash \begin{array}{l} \top \sqsubset 0 \equiv a \\ \sqsubset f^*(a, 0) \\ \sqsubset f^{**}(a, 0) \end{array}.$$

Aplique modus ponens entre i) e ii). Então

$$iii) \vdash \begin{array}{l} \top \sqsubset 0 \equiv a \\ \sqsubset f^{**}(a, 0) \end{array}.$$

Mas iii) é equivalente a

$$iv) \vdash \begin{array}{l} \top \sqsubset a \equiv 0 \\ \sqsubset f^{**}(a, 0) \end{array}.$$

Seja a seguinte instância de (PH3)

⁷⁹ Nada é ancestral forte de zero.

$$v) \vdash \begin{array}{l} \vdash_x \left(\vdash \vdash x \equiv \emptyset \right. \\ \quad \vdash \vdash Pred^{**}(x, \emptyset) \left. \right) \equiv \vdash_x (\vdash x \equiv x) \\ \quad \vdash Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad \vdash UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad \vdash Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\vdash \vdash \alpha \equiv \emptyset, (\vdash \vdash \beta \equiv \beta) \right) \\ \quad \quad \vdash \vdash Pred^{**}(\cdot, \emptyset) \end{array}$$

Como a relação predecessor é funcional e um-para-muitos, é derivada a fórmula

$$vi) \vdash \begin{array}{l} \vdash_x \left(\vdash \vdash x \equiv \emptyset \right. \\ \quad \vdash \vdash Pred^{**}(x, \emptyset) \left. \right) \equiv \vdash_x (\vdash x \equiv x) \\ \quad \vdash Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \left(\vdash \vdash x \equiv \emptyset, \vdash \vdash \beta \equiv \beta \right) \\ \quad \quad \vdash \vdash f^{**}(\alpha, \emptyset) \end{array}$$

Desenvolvendo o antecedente de iv), essa fórmula é equivalente a

$$vii) \vdash \begin{array}{l} \vdash_x \left(\vdash \vdash x \equiv \emptyset \right. \\ \quad \vdash \vdash Pred^{**}(x, \emptyset) \left. \right) \equiv \vdash_x (\vdash x \equiv x) \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash a \equiv \emptyset \\ \quad \quad \quad \vdash f^{**}(a, \emptyset) \\ \quad \quad \quad \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash b \\ \quad \quad \vdash b \equiv b \\ \quad \quad \quad \vdash a \\ \quad \quad \quad \quad \vdash a \equiv \emptyset \\ \quad \quad \quad \quad \quad \vdash f^{**}(a, \emptyset) \end{array}$$

Seja a seguinte instância de 1BS

$$viii) \vdash \begin{array}{l} \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash a \equiv \emptyset \\ \quad \quad \quad \vdash f^{**}(a, \emptyset) \\ \quad \vdash b \equiv b \end{array}$$

Mas $\vdash b \equiv b$. Por *modus ponens*, deriva-se

$$ix) \vdash \begin{array}{l} \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash a \equiv \emptyset \\ \quad \quad \quad \vdash f^{**}(a, \emptyset) \end{array}$$

Aplicando a regra de generalização, temos

$$x) \vdash \begin{array}{l} \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash a \equiv \emptyset \\ \quad \quad \quad \vdash f^{**}(a, \emptyset) \end{array}$$

Seja a seguinte instância de 1BS

$$\begin{array}{c} \vdash \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \equiv \emptyset \\ f^{**}(a, \emptyset) \\ \text{b} \equiv \text{b} \end{array} \\ a \equiv \emptyset \\ f^{**}(a, \emptyset) \end{array} \end{array}$$

Uma vez que $\vdash \begin{array}{c} a \equiv \emptyset \\ f^{**}(a, \emptyset) \end{array}$, aplique modus ponens. Assim

$$\vdash \begin{array}{c} a \equiv \emptyset \\ f^{**}(a, \emptyset) \\ \text{b} \equiv \text{b} \end{array}$$

Aplicando a regra de generalização, é obtida a fórmula

$$\text{xi)} \vdash \begin{array}{c} a \\ \vdash \begin{array}{c} a \equiv \emptyset \\ f^{**}(a, \emptyset) \\ \text{b} \equiv \text{b} \end{array} \end{array}$$

Aplique modus ponens entre vii), x e xi. Assim

$$\vdash \#_x \left(\vdash \begin{array}{c} x \equiv \emptyset \\ Pred^{**}(x, \emptyset) \end{array} \right) \equiv \#_x (\vdash x \equiv x)$$

Mas

$$\#_x (\vdash x \equiv x) \equiv \emptyset$$



Esta obra está licenciada com uma Licença
Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional.