

Quantos serão suficientes? O cisne branco no país das demonstrações

How many is enough? The White Swan in the country of demonstrations

Anthony Ewerton Marinho de Vasconcelos^{1*}

 ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-6626-7355>

Marcílio Ferreira dos Santos²

 ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-8724-0899>

Resumo

Os processos de ensino e aprendizagem da Matemática se propõem a contemplar uma pluralidade de elementos que possam desenvolver nos estudantes as habilidades mínimas para se compreender e aplicar tal ciência. O presente trabalho se debruça sobre as habilidades argumentativas, com o objetivo de analisar a abordagem dada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) à argumentação e às demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental da Educação Básica, na área da Matemática, uma vez que esse documento tem exercido muita influência sobre a prática docente nas escolas. Para isso, realizamos um estudo de natureza qualitativa das orientações dadas pela BNCC, assim como das suas habilidades, no Ensino Fundamental, no que tange à argumentação e às demonstrações matemáticas. Nossa análise indicou que a BNCC aborda esses aspectos, mas o faz de maneira escassa na descrição das habilidades. Portanto, as instituições educacionais devem estar atentas ao fato de que precisam explorar habilidades de argumentação e demonstração matemática que extrapolem os limites da BNCC.

Palavras-chave: Argumentação matemática. Prova lógica. BNCC. Educação matemática.

Abstract

Mathematics's teaching and learning processes propose to contemplate a plurality of elements that can develop the minimum skills to understand and apply this science to students. The present paper focuses on argumentative skills, intending to analyze the approach given by the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) to argumentation and mathematical demonstrations in Elementary School of Basic Education, in Mathematics, since this document has exerted a lot of influence on teaching practice in schools. For this, we carried out a qualitative study of the guidelines given by the BNCC, as well as their skills, in Elementary School, about argumentation and mathematical demonstrations. Our analysis indicated that the BNCC addresses these aspects but does so sparingly in the description of skills. Therefore, educational institutions must be aware of the fact they need to explore mathematical argumentation and demonstration skills that go beyond the limits of the BNCC.

Keywords: Mathematical argument. Logical proof. BNCC. Mathematics education.

Recebido em: 30/08/2022 - Aceito em: 13/02/2023 - Publicado em: 14/02/2023

^{1*} Licenciado em matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), da UFPE, Caruaru, PE, Brasil. E-mail: anthonyemarinho@gmail.com.

² Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), professor adjunto na UFPE, Caruaru, PE, Brasil. E-mail: marcilio.santos@ufpe.com.



1 Introdução

O ensino da Matemática é circundado pelos mais diversos objetivos. Dentre eles, podemos destacar o de desenvolver o pensamento matemático, a fim de refletir criticamente sobre as mais diversas situações (inclusive sociais) e tomar decisões baseadas nas experiências empíricas e abstratas proporcionadas pela aprendizagem em Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), de 1998, que por muitos anos têm direcionado a ação docente no Brasil, a Matemática é caracterizada “como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural” (Brasil, 1998, p. 24). Mas, talvez, uma das mais importantes premissas no ensino da Matemática é a de que “é bastante difícil *compreender* matemática sem fazer um pouco de matemática” (Ellenberg, 2015, p. 27, grifo do autor).

O pensamento matemático se desenvolve fazendo matemática, o que pode ser alcançado das mais diversas formas nas aulas dessa disciplina: através de projetos, da modelagem matemática de situações correlatas às vivências dos estudantes, da resolução de problemas, entre outras tendências para o ensino da Matemática. São esses alguns ótimos exemplos, entre outros, de meios de aprendizagem que estimulam à criatividade dos estudantes. Todavia, uma nuance bastante peculiar do pensamento matemático pode estar em extinção na Educação Básica: as demonstrações matemáticas. Podemos entender a prova lógica como “um processo que envolve o ato de organizar as diversas ideias e *insights* que levaram à solução em uma argumentação precisa e lógica. Essa parte do processo exige muito treinamento” (Devlin, 2004, p. 293, grifo do autor).

Portanto, as demonstrações matemáticas são também um típico exemplo de atividade que estimula a criatividade do estudante e o desenvolvimento de habilidades argumentativas, além de contribuir com o desenvolvimento neste de uma promissora habilidade de questionar, investigar, verificar teses e chegar a conclusões, que por sua vez nada mais são do que impulsionadoras para novos questionamentos, investigações, verificações, ... Ou seja, é o método científico aplicado (entendemos por método científico uma pluralidade de meios para se avançar a ciência, nem fixos nem neutros. Não há apenas um caminho). Testa, erra, corrige, recomeça, enfim, constrói-se conhecimento de uma maneira sistemática e formal a fim de se ter os resultados validados dentro da comunidade científica. Em tempos que informações falsas circulam sem ser questionadas, ser hábil em duvidar e exigir comprovação é fundamental.

Temos, assim, que é por esse motivo que “os matemáticos insistem em provas precisas

e lógicas, porque o processo de descoberta pode levar a erros. [...] A prova lógica é o árbitro da verdade na matemática, e é aí que o pensamento lógico se faz necessário” (Devlin, 2004, p. 293). O que corrobora com o fato de que, embora a experimentação seja fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático, a Matemática não é uma ciência empírica, o que já é prenunciado nos PCN de 1998.

Os documentos curriculares, como elementos normativos para o ensino e a aprendizagem, têm um importante papel ao estimular, ou não, práticas entre os docentes. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento oficial que estabelece alguns parâmetros curriculares para a Educação Básica nas escolas do Brasil. A BNCC sugere as principais competências e habilidades a serem desenvolvidas, ano a ano, na educação escolar. Além disso, conceitos transversais, metodologias de ensino e uma dimensão intrapessoal dos sujeitos da aprendizagem são colocadas.

Este trabalho se inicia acompanhando, figurativamente, um personagem fictício: o cisne branco. Em meio a uma excursão pelo também fictício país das demonstrações, discutiremos conceitos, histórias e perspectivas que convergem para o objetivo deste artigo, analisar a abordagem dada pela BNCC à argumentação e às demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental da Educação Básica, na área da Matemática. Começemos nossa viagem por esse maravilhoso mundo da matemática, um lugar no qual a contagem um a um nem sempre nos dá as respostas (embora às vezes sim), em que é preciso argumentar, demonstrar ou, no mínimo, ir ao infinito... e além!

2 Quantos cisnes brancos precisamos ver para garantir que todos os cisnes são brancos?

Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita, por muitos matemáticos, como a única forma de validação dos seus resultados. Apesar da importância da experimentação, de visualizar por meio de exemplos e construções, a Matemática não é uma ciência empírica. Não é possível, por exemplo, validar matematicamente o teorema fundamental do triângulo retângulo³ ou o teorema relativo à soma dos ângulos internos de um triângulo através da apresentação de vários exemplos que o confirmem ou da experimentação

³ De que o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Apesar de ser conhecido como Teorema de Pitágoras, tal título oculta uma história muito mais ampla desse teorema, que remonta aos babilônios (Boyer, 1996). Por essa razão, o chamamos aqui de Teorema fundamental do triângulo retângulo.

com materiais físicos (Brasil, 1998). Em um trecho de *Saber e ensinar matemática elementar*, Liping Ma disserta sobre o que chamaremos de problema dos cisnes brancos:

<<Ainda que eu visse dois cisnes brancos, não acreditaria que todos os cisnes são brancos.>> Contudo, quantos cisnes brancos precisamos de ver para acreditar que todos os cisnes são brancos? Preocupando-se com o *número* de exemplos, estes professores ignoraram o facto de que uma afirmação matemática concernente a um número infinito de casos não pode ser provada por muitos exemplos em número finito – não importa quantos. Deverá ser provada por um argumento matemático. (Ma, 2009, p. 158-159, grifo da autora).

É partindo desta premissa, de questionar sobre o que é necessário para que se tenha certeza sobre determinado fato (ou propriedade), que enxergamos o potencial das demonstrações matemáticas no ensino da Matemática, inclusive no sentido de contribuir com a formação de cidadãos mais críticos. As proposições causam inquietação, geram perguntas, demandam pesquisas, argumentação e formalização matemática para se concluir algo sobre a sua veracidade. Isso envolve a criatividade do estudante e uma postura ativa deste, ampliando o seu nível de raciocínio matemático.

Pensemos no cisne branco como um personagem fictício interessado em resolver o problema dos cisnes brancos. Para isso, adentra no país das demonstrações, a procura de um argumento matemático capaz de solucionar o problema. Já na entrada, depara-se com uma inscrição, sobre a qual está talhada o seguinte dizer: o cisne é uma ave; toda ave possui penas; logo, o cisne possui penas. Isso não lhe trouxe a resposta que queria, então seguiu. Aquela era a lógica silogista aristotélica. Embora não fosse a solução do problema dos cisnes brancos, estava nos fundamentos históricos que podem resolvê-lo.

A lógica formal, estudada por Aristóteles na Grécia Antiga a partir de raciocínios silogísticos como esse, é a base dos argumentos demonstrativos (Mendonça & Justi, 2013). Mas do que se trata, afinal, a argumentação? A argumentação é “entendida como uma atividade de natureza social cuja realização mobiliza recursos de natureza linguística e cognitiva dos indivíduos” (Leitão, 1999, p. 93), sendo, portanto, “um fenômeno natural e uma realização humana única” (Wenzel, 1993, p. 1, tradução nossa). A argumentação é empregada para resolver diferenças e é um método de tomada de decisão crítica (Wenzel, 1993), constituindo, assim, um importante elemento para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Além da lógica (seja a formal ou a informal), a argumentação também pode ser pensada retórica ou dialeticamente. Na retórica, as decisões dependem da adoção de um discurso bem estabelecido e persuasivo. Todo argumento retórico pode se tornar dialético (Wenzel, 1993). Na dialética, por sua vez, as decisões dependem do estabelecimento de uma interação sistemática (seja *inter* ou *intrapessoal*) e, finalmente, na lógica, as decisões dependem de evidências.

Conforme Wenzel (1993), a argumentação retórica, dialética e lógica referem-se, respectivamente, ao *processo*, ao *procedimento* e ao *produto* da produção de argumentos.

Ainda que os processos e os procedimentos sejam indispensáveis a uma demonstração matemática, esta não possui validade se não apresentar um produto da produção de argumentos que seja evidência para a proposição envolvida, o que implica, necessariamente, numa argumentação lógica. Por esta razão, no recorte feito neste trabalho, debruçamo-nos sobre a abordagem lógica da argumentação, não por esta ser superior hierarquicamente às demais, mas por estar mais alinhada com os pressupostos das demonstrações matemáticas. Todas as três artes da argumentação (retórica, dialética e lógica) são igualmente necessárias na tomada de decisões e resolução de divergências, sendo potencialmente promissoras para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Os argumentos demonstrativos (ou provas lógicas) se tornaram cada vez mais recorrentes e necessários entre os matemáticos. No seu trajeto, o cisne branco escuta ao longe o eco do discurso de Christopher Wren (1632-1723), na ocasião da sua nomeação como professor do Gresham College de Londres, na qual proferiu as seguintes palavras:

As demonstrações matemáticas, construídas sobre os alicerces inabaláveis da Geometria e da Aritmética, são as únicas verdades que podem calar na mente do homem, vazias de toda incerteza; e todos os outros discursos participam mais ou menos da Verdade conforme os seus temas sejam mais ou menos capazes de demonstração matemática. (Flood, 2013, p. 104).

Apesar da acalorada colocação de Wren, não podemos deixar de concordar com o fato de que as demonstrações matemáticas nos possibilitam confrontar eventuais verdades e investigar se são válidas, ou não, dentro das “regras do jogo” no qual estão inseridas. Até porque certas proposições dependem de um “universo” bem definido para terem sua correção conceitual validada ou não.

Um típico exemplo disso é a proposição 1:

$$\text{Se } 4 < x < 6, \text{ então } x = 5 \quad (1)$$

Para avaliar essa proposição, é necessário, primeiramente, estabelecer em qual “universo” ela está inserida. Se é o conjunto dos números inteiros, então a proposição é verdadeira. Se é o conjunto dos números racionais, então a proposição é falsa. Cabe aqui a ideia de que a verdade é referencial. Falar de verdades absolutamente universais é um chão de vidro no qual deveríamos evitar caminhar. Entretanto, ao lidar, por exemplo, com a proposição 1, pode ocorrer que alguns estudantes apenas a avaliem, sem questionar em que universo está inserida (considerando, claro, a etapa da Educação Básica em que se encontrem).

Em geral, podemos esperar isso pelo fato de não ser um hábito entre os estudantes da

Educação Básica o exercício do questionamento crítico, da descrença. Por, muitas vezes, estarem acostumados a serem “receptores” de informações prontas, acabadas e verdadeiras, acostumam-se a aceitar e a acreditar em tudo, desde que venha de uma autoridade hierarquicamente superior (neste caso, o professor). Nesse contexto, espera-se que através do estímulo à argumentação e às demonstrações matemáticas, o pensamento matemático dos estudantes se amplie, assim como o exercício da sua cidadania, agregando a ideia de que as coisas são o que são por um motivo, que pode ser confrontado (questionado), justificado e explicitado de maneira lógica e consistente. Que é necessário verificar se aquele fato é verdadeiro ou, no mínimo, se especialistas naquela área confirmam a sua veracidade.

Estudantes que, quando diante de possíveis propriedades matemáticas desconhecidas, aceitam-nas sem muita reflexão, sem o mínimo de averiguação da veracidade desta nova propriedade, muitas vezes trabalham com falsas proposições sem nem mesmo se dar conta disso, sem ter ideia do porquê errou. Isso porque são mais acostumados a aplicar, calcular e resolver, e pouco a questionar, verificar e comprovar.

O caráter procedimental que a Matemática assume nas aulas da Educação Básica, muitas vezes associado apenas a uma aprendizagem mecânica, tem cada vez mais ofuscado a dimensão conceitual dos temas discutidos. A aprendizagem mecânica é definida por David Ausubel “como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva” (Moreira, 1982, p. 9), em contraste com a aprendizagem significativa, que é “um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo” (Moreira, 1982, p. 7) e que deve ser explorada nas aulas de matemática. Os verbos “resolver” e “calcular” parecem ter substituído os verbos “construir” e “relacionar”, tão inerentes à Matemática em todas as suas etapas de desenvolvimento histórico. A demonstração matemática oferece, portanto, sólidas contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático e de uma aprendizagem significativa, inclusive se empregada na Educação Básica.

As provas lógicas podem ser pensadas como recurso a mais na prática docente, até como metodologia de ensino, visando ampliar as habilidades de raciocínio e compreensão dos estudantes. Como tal, não pode ser vista de maneira isolada, mas em conjunto, com as mais variadas metodologias e tendências discutidas e veiculadas no campo da Educação Matemática, tal como a resolução de problemas, modelagem matemática, tecnologias da informação e comunicação, exercícios de aplicação, jogos, etc.

A falta de contato do estudante da Educação Básica com este tipo de raciocínio, inclusive, prejudica no desenvolvimento da ideia de generalização. Veja no exemplo a seguir

uma situação hipotética, entretanto comum, sobre como um estudante avaliou a proposição 2.

O produto de dois números reais entre 0 e 1 é menor do que ambos os números. (2)

Pegamos 0,25 e 0,5.

Multiplicando $0,25 \cdot 0,5$ obtemos 0,125, que é menor do que ambos.

Portanto, a proposição (2) é verdadeira.

Um indivíduo que possua o pensamento matemático limitado pelas ideias de “resolver” e “calcular” pode julgar que esse é um argumento suficiente, mas não é. Um argumento mais apropriado poderia ser o apresentado a seguir:

Dado que dois números reais, um é sempre menor ou igual ao outro,

podemos denotar x e y os dois números reais,

com $0 < x \leq y < 1$.

Ao multiplicar a desigualdade $0 < y < 1$ por x , obtemos

$0 < xy < x$

Portanto, o produto xy é menor do que x e, por consequência, menor do que y .

Logo, não oportunizar ao estudante a possibilidade de lidar com este tipo de situação limitará o desenvolvimento do nível do seu pensamento matemático.

Após um longo trajeto no qual a validação de proposições matemáticas passa, exclusivamente, pelo filtro das provas lógicas sistematizadas textualmente, o cisne branco identifica um lugar diferente, mas muito amplo. Entra em uma sala cheia de mapas, de cores e... de computadores?

3 Quantos mapas eu preciso pintar para garantir que quatro cores são o suficiente?

Um matemático propôs, em 1852, que bastavam quatro cores para pintar qualquer mapa, de forma que países vizinhos ficassem sempre com cores diferentes, mas não demonstrou isso. Essa proposição foi formulada pela primeira vez por Francis Guthrie, sul-africano estudante de direito (Warsi, 2020).

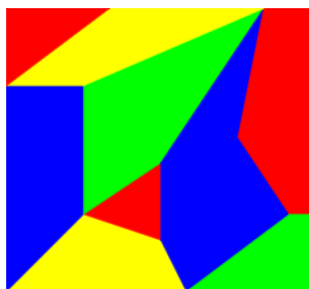


Figura 1 – O problema das quatro cores

Mais de um século depois, um grupo de matemáticos conseguiu tal feito, mas foram necessários computadores para isso (e 1200 horas de processamento). Foi a primeira vez em que se provou um teorema matemático utilizando computadores, o que, obviamente, gerou controvérsias. “Nas últimas décadas, a comunidade de matemáticos teve que aprender a lidar com o uso intensivo de computadores em uma área do conhecimento que, por muito tempo, aceitava de forma quase única argumentos lógicos na forma textual” (Barichello, 2021, p.3). É inegável que o avanço da Matemática como ciência, inevitavelmente, investiria também em recursos digitais para validar proposições em aberto. Apesar disso, “A prova por computador continua controversa, mas avanços em tecnologia aumentaram a convicção em sua confiabilidade” (Warsi, 2020, p. 313).

Como também não encontrou nos computadores a solução que procurava, o cisne branco seguiu a excursão e avistou, ao longe, a sombra de um passado, de um homem que parecia estar lançando algo para cima repetitivamente. Precisou se aproximar para confirmar: ele lançava uma moeda.

4 Quantas vezes eu preciso lançar uma moeda para garantir que metade dos resultados seja ‘cara’?

John Kerrich foi um matemático sul-africano aprisionado pelos alemães na Segunda Guerra Mundial. Em tal circunstância, diz-se que ele lançou uma moeda 10 mil vezes, obtendo 5067 caras e 4933 coroas (Teixeira & Morgado, 2011). Tal experimento aleatório tinha como objetivo verificar algumas propriedades da probabilidade, tais como a lei áurea de Jacques Bernoulli, que ficou conhecida posteriormente como a Lei dos Grandes Números (Boyer, 1996).

Nesse caso, a probabilidade teórica de se obter cada uma das faces da moeda em um lançamento é de 50%. A Lei dos Grandes Números diz que se $f(n)$ é a frequência absoluta de caras em n lançamentos, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

ou seja, o limite das frequências relativas, quando o número de lançamentos tende ao infinito, é a probabilidade teórica (Teixeira & Morgado, 2011). Era isso que Kerrich queria verificar, o que definitivamente não é possível com 10 mil lançamentos.

Essa situação nos faz refletir que nem todas as leis matemáticas envolvem fenômenos determinísticos, mas também os fenômenos aleatórios, como o lançamento de uma moeda.

Matemáticos se debruçam nessa questão há séculos, e após indagar, experimentar e investigar formalmente, concluíram sobre a convergência das frequências relativas para a probabilidade teórica. Mas seria possível nos 10 mil lançamentos não sair cara nenhuma vez? Pois bem, a resposta é sim. E isso não tira a validade da Lei dos Grandes Números. É pensar sobre a aleatoriedade.

Não tendo encontrado nada para a sua questão na aleatoriedade, o cisne branco se aproximou dos limites do país das demonstrações, um local esquecido, no qual ouviu gritos, e eram pedidos de ajuda. Apesar de uma grande placa de “Ignore os gritos”, o cisne branco avançou.

5 Quantas vezes eu preciso gritar para garantir que serei ouvido?

Há também, dentro do desenvolvimento desse tipo de habilidade argumentativa, indagadora, uma dimensão crítica e política que é contemplada. Em Borba e Skovsmose (1997), somos confrontados desde o início com a seguinte afirmação:

Resultados Matemáticos e Estatísticos figuram sempre como referências dos debates em progresso na sociedade. Eles formam parte da estrutura de argumentação. Deste modo, a matemática é usada como pano de fundo para o debate político. Mas não somente isto. Ela se torna parte da linguagem das sugestões políticas, tecnológicas e administrativas que são apresentadas. A matemática se torna parte da linguagem de poder. [...] O poder atribuído à matemática de dar suporte a essas decisões é o que chamaremos da ‘ideologia da certeza’ (p. 17, tradução nossa).

Nosso objetivo de refletir sobre as demonstrações no contexto da sala de aula vai na direção que Garnica (2002) aponta. Esse autor pontua que a demonstração matemática é um elemento fundamental para entender a prática científica, sendo imprescindível nos cursos de formação inicial de professores, fundamentando uma abordagem crítica, dando autonomia ao estudante e habilitando-o para refletir sobre as formas de manutenção da ideologia da certeza. Assim, abrindo caminhos para contribuir na formulação da argumentação lógica.

Borba (1992) questiona a posição da Matemática como ciência neutra, única, uniforme e monocultural. Na realidade, a Matemática só é universal quando diz respeito aos seus próprios objetos matemáticos, definidos localmente e assim estudados. Queremos dizer que todos que leiam a definição de função podem tirar as mesmas conclusões decorrentes daquele objeto. Porém, quando a Matemática modela problemas da vida real, ela passa a ter uma visão subjetiva em alguns pontos. Quando estuda dados, por exemplo, uma escolha diferente de um subconjunto pode gerar percepções diferentes. Assim, a Matemática já perde seu status de inquestionável.

Borba (1992) questiona a versão de uma Matemática exata sempre, principalmente nos contextos dos problemas reais, trazendo o exemplo da medida da fronteira entre Portugal e Espanha. Ele observa que dependendo do registro, as medidas são diferentes e isso não se deve a medidas mal realizadas por um ou por outro responsável pela medida, mas ao fato de que, ponto a ponto, as medidas naturais mudam com o tempo. Para compreender isso, pense na tentativa de medir o tamanho de uma orla de uma cidade litorânea. Esse tamanho muda conforme a maré, conforme a estação do ano, conforme as mudanças climáticas avançam etc. Assim, a Matemática em situações reais não é mais exata e um observador crítico, antes de aceitar o resultado, precisa questionar quando e como essas medidas foram realizadas.

6 Quantas vezes eu preciso mentir para que pareça verdade?

Depois de andar pelos diversos terrenos das demonstrações consistentes e das argumentações mais críticas, o cisne branco acabou por avistar uma área nebulosa no país das demonstrações. Conhecido como pântano da falácia e dos paradoxos, o local era cheio de redemoinhos de argumentos circulares, o chão era coberto de lodo em ladeiras escorregadias, espantalhos assustadores e outras armadilhas falaciosas que podem levar um cisne ou até mesmo um estudante a sofrerem a maior lesão desse país: uma conclusão equivocada.

Muitos cisnes inclusive caíam facilmente na falácia presente no poço do paradoxo dos cavalos, onde o cisne branco quase acreditou ter a resposta para sua questão. Um sábio cavalo percebeu o risco desse poço para seu povo e o vedou com um aviso de perigo! Primeiramente, vamos avaliar o conceito de indução finita formulado por Peano: “na indução matemática, se uma propriedade vale para n_0 e é possível afirmar, com certeza, que esta propriedade vale para m indivíduos. Se, assumindo que a propriedade vale para m , for possível mostrar que a mesma propriedade valerá para $m + 1$, então a propriedade vale para todos os n ”.

O poço dos cavalos era mortal para eles, pois sofriam de um problema parecido com o do cisne. Alguém disse uma vez que todos os cavalos eram da mesma cor e fez uma sugestão para o argumento de indução: “Supondo que n cavalos são sempre da mesma cor, para provar que $n + 1$ cavalos são da mesma cor basta tomar um conjunto com esses $n + 1$ cavalos, retirar um e só poderá sobrar n cavalos que, por hipótese, são sempre da mesma cor. Faltaria apenas mostrar que o cavalo retirado também era da mesma cor e, para isto, recolocamos ele no conjunto e retiramos um dos outros cavalos. O conjunto com $n - 1$ cavalos com o novo integrante tem n elementos, portanto é formado apenas de cavalos da mesma cor”. Muitos

cavalos caíam no poço confusos por não aceitarem o fato da matemática levar ao paradoxo, pois eles eram de cores diversas, mas a matemática dizia que eles eram da mesma cor! Como viver com esta dor?

O sábio cavalo encontrou a resposta que, olhando agora, pode parecer óbvia, mas o grande problema é que o argumento, que parecia genérico, não funcionaria para $n = 2$. Pois, observe, caso você tome dois cavalos e retire 1, observe claramente que o conjunto unitário terá apenas cavalos da mesma cor. Porém, ao recolocar o indivíduo e retirar o outro, como não há outro cavalo além dele que tenha a cor do primeiro, não temos como ousar concluir que estes cavalos são da mesma cor. Isto dependia da transitividade, ou seja, de sobrar um cavalo da cor do primeiro a sair e do segundo.

Esta explanação é importante para que professores percebam que argumentos aparentemente muito bons podem ser questionados. Generalizações também precisam ser cautelosas para que se saiba se elas são sempre válidas. Muitos matemáticos geniais também já caíram em argumentos aparentemente bem genéricos.

Aquela parecia ter sido a porta final, pois após percorrer um árduo caminho, o cisne branco já estava quase desistindo quando escutou um ruído ao longe. Era a solução do seu problema que lhe olhava a alguns metros de distância, ele mal podia acreditar...

7 Metodologia

Dada a influência e amplitude da BNCC, muito do que é sugerido por esse documento passa a fazer parte do planejamento dos professores, assim como muito do que não é (ou surge com menor frequência) pode acabar sendo esquecido. Uma vez que “as fontes documentais tornam-se importantes para detectar mudanças na população, na estrutura social, nas atitudes e valores sociais etc.” (Gil, 2008, p. 154) e visto que o objetivo desta pesquisa apenas pode ser alcançado por meio de uma análise do documento da BNCC, nosso trabalho segue alguns elementos da análise documental.

Nessa análise, realizamos uma leitura geral da área de Matemática no Ensino Fundamental desse documento e, em seguida, uma leitura mais minuciosa das suas partes que possuem relação direta ou indireta com as ideias de argumentação e demonstração matemática. A partir dessa segunda leitura, identificamos as principais informações e sugestões apresentadas, assim como a relevância que a BNCC dá às temáticas em foco.

8 Análise da BNCC

A BNCC já prenuncia que a Matemática não se limita apenas a técnicas de cálculo, agregando também, por exemplo, a incerteza, particularidade dos fenômenos de caráter aleatório. Isso já reafirma a necessidade de romper com a visão reducionista de que aprender Matemática é apenas desenvolver técnicas de cálculo e algoritmos para resolver problemas. Entre as dez Competências Gerais da Educação Básica apresentadas pela BNCC, já se estabelece a importância em desenvolver habilidades argumentativas nos estudantes, em todas as áreas do conhecimento, por meio da Competência Geral 7:

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (Brasil, 2018, p. 9).

Especificamente para a área da Matemática, traz, entre as chamadas competências fundamentais para o letramento matemático, a argumentação. “O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático*, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente”. (Brasil, 2018, p. 266, grifo do autor). A argumentação matemática é, portanto, sugestão comum a todo Ensino Fundamental. São diversas as formas de estimular no estudante a habilidade de argumentar matematicamente, mas sem dúvida, uma das que apresenta grande potencial para isso são as demonstrações matemáticas. No campo da demonstração, o texto da BNCC afirma que “A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental”. (Brasil, 2018, p. 265), trazendo a sugestão de que esta é uma abordagem a ser utilizada nas aulas de Matemática.

A BNCC estabelece oito Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental. Na Competência Específica 2, a argumentação volta a ser mencionada, associada ao raciocínio lógico e à investigação: “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo”. (Brasil, 2018, p. 267). É fato que a construção de argumentos convincentes ancorados em conhecimentos matemáticos não perpassa, necessariamente, por provas lógicas. Entretanto, o desenvolvimento de provas lógicas contribui na construção de argumentos convincentes quando necessários, mesmo que não se façam sobre a estrutura de uma demonstração formal.

Você deve se questionar qual a abordagem que deve ser dada durante os anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano) no que tange às demonstrações matemáticas. Pode parecer, a princípio, que esse não é um momento ideal para tais temáticas, entretanto, isso pode ocorrer sim, de várias formas. É interessante como teorias cognitivistas do desenvolvimento, como a do psicólogo, biólogo e epistemólogo suíço Jean Piaget, por exemplo, já estabelecem em que grau esse tipo de raciocínio pode ser trabalhado entre crianças. No estágio cognitivo do desenvolvimento infantil operacional concreto⁴ (que vai dos 7 aos 11 anos), acontece, segundo Piaget, o início do pensamento lógico. Logo, nesta fase, devem ser plantadas as sementes para o raciocínio abstrato da prova lógica, a fim de que a criança desenvolva suficientemente esta habilidade cognitiva em surgimento.

A BNCC, inclusive, apresenta uma das formas de estimular esta modalidade de raciocínio desde o terceiro estágio cognitivo do desenvolvimento infantil: avaliar a plausibilidade de resultados. “No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática [Números] é que os alunos [...] argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados”. (Brasil, 2018, p. 268).

Ainda que isso não envolva o rigor peculiar das demonstrações matemáticas, avaliar os resultados é uma ação do estudante que lhe desperta a curiosidade, a habilidade de questionar, verificar e, por que não, formalizar (mentalmente ou não) os procedimentos utilizados. O que são isso se não a base de uma boa demonstração matemática? Por exemplo, uma criança, ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental, depara-se com o seguinte problema: Calcule 25% de 200. Após efetuar as operações, obtém como resultado 500. Diante disso, uma possibilidade (bastante comum) é a de que o estudante aceite esse resultado como verdadeiro. Uma outra possibilidade é a de que o estudante avalie a plausibilidade de tal resultado, ou seja, se é coerente obter 500 como resposta. Ele pode pensar “como eu calculo uma parte de 200 e o resultado é maior do que 200? Deve ter algo errado!”. E, a partir disso, identificar em que momento cometeu um erro.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC é explícita quanto a usar o recurso das demonstrações matemáticas. Sugere, como exemplo, o conceito de triângulos congruentes ou semelhantes, “reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos

⁴ Jean Piaget, ao propor a Epistemologia Genética, distinguiu quatro estágios de Desenvolvimento do Conhecimento: sensório-motor (do nascimento até cerca de 2 anos), pré-operacional (de 2 a 7 anos), operacional concreto (de 7 a 11 anos) e operacional formal (11 anos ou mais), com a finalidade de “explicar a ordem de sucessão em que as diferentes capacidades cognitivas se constroem” (Pádua, 2009, p. 27). Para mais detalhes, consultar Pádua (2009).

congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo” (Brasil, 2018, p. 272).

Destaca-se o raciocínio hipotético-dedutivo, além de afirmar que as demonstrações contribuem para o seu desenvolvimento. Com isso, a BNCC apresenta aos docentes o importante papel das demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental, o que pode ser um estímulo para que sejam incorporadas no planejamento do professor. Ou não. Mas, de qualquer forma, dada a amplitude nacional deste documento curricular e a demanda de incorporar suas orientações nas escolas, é provável que muitos professores sejam perpassados por estas orientações e, ao menos, reflitam sobre elas.

Quadro 1

Habilidades da BNCC correlatas à argumentação e às demonstrações matemáticas.

Série	Objetos de conhecimento	Habilidades
4º ano	Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10.	(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
5º ano	Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações	(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
8º ano	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
9º ano	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
9º ano	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Nota. Fonte: Baseado em Brasil (2018)

A BNCC apresenta também os Objetos de conhecimento (conteúdos) e as Habilidades associadas a cada um deles, ano a ano. O Quadro 1 traz as habilidades da BNCC que guardam alguma relação com a argumentação e com as demonstrações matemáticas. Os códigos alfanuméricos presentes nas Habilidades indicam a etapa de Ensino Fundamental, o ano (série

escolar), o componente curricular e a posição da habilidade na numeração sequencial, respectivamente (Brasil, 2018). Por exemplo, EF09MA13 é um código alfanumérico para uma Habilidade do Ensino Fundamental (EF), presente no 9º ano (09), referente ao componente curricular Matemática (MA) e é a 13ª Habilidade no bloco do 9º ano (13).

Através da análise destes Objetos de conhecimento e das Habilidades, verificamos que, nesta parte, a argumentação e as demonstrações matemáticas aparecem muito timidamente. Isso se deve ao fato de que tais ideias estão, de fato, presentes entre as Habilidades, mas de maneira muito sutil e escassa, quando pensamos na totalidade de Habilidades apontadas pela BNCC.

Os verbos “mostrar”, “concluir” e “demonstrar” sinalizam para proposições que necessitam de alguma evidência (ainda que informal) ou razão suficiente para assegurar a sua veracidade. Estas ações envolvem a construção de argumentos e, portanto, são potencialmente argumentativas. As habilidades EF09MA10 e EF09MA13, por sua vez, além do já mencionado, envolvem também, explicitamente, a demonstração matemática de algumas propriedades geométricas, perpassando por provas lógicas para tais propriedades. Estas escolhas apontam que houveram, na construção do documento, algumas reflexões sobre a importância de o estudante justificar propriedades da matemática, construindo assim argumentos, mas que na prática, tal direcionamento não se mostrou tão presente quanto poderia (e deveria).

Ao oferecer orientações seriadas específicas, a BNCC optou por quase não mencionar estas nuances do raciocínio matemático. Em geral, são priorizadas habilidades em resolver e elaborar problemas correlatos aos Objetos de conhecimento. Os verbos “comparar”, “classificar”, “calcular”, “identificar”, entre outros, também estão presentes entre as Habilidades. Uma quantidade maior de Habilidades que valorizassem nos estudantes a sua predisposição em argumentar (e, conseqüentemente, de demonstrar matematicamente) seria mais coerente com o texto da própria BNCC, assim como contribuiria mais efetivamente para a presença e o estabelecimento desta dimensão do pensamento matemático nas escolas da Educação Básica.

Por exemplo, no 7º ano, no qual nenhuma Habilidade correlata à argumentação e à demonstração matemática foi identificada, tem-se a Habilidade EF07MA08, “Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (Brasil, 2018, p. 307). Esta Habilidade poderia ser decomposta em outras, menos genéricas, tais como “Mostrar que, entre frações de mesmo numerador, a maior será aquela cujo denominador é o menor”. Neste caso, abrange-se parte da Habilidade EF07MA08 sem comprometer o seu conteúdo e a sua intencionalidade, à medida que possibilita, também, o desenvolvimento da aptidão em construir argumentos.

Ainda no 7º ano, a Habilidade EF07MA24, “Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° ” (Brasil, 2018, p. 309), tornar-se-ia potencialmente argumentativa apenas com a troca do verbo “verificar” pelo verbo “mostrar”: “Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e *mostrar* que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° ”. Este tipo de adaptação não compromete as outras habilidades esperadas, apenas as refina e as complementa. Uma vez que a própria BNCC não se apresenta dessa forma, cabe aos sistemas de ensino, secretarias de educação, escolas, professoras e professores realizarem tais adaptações. Mas será que isso será lembrado?

9 Considerações finais

Embora a BNCC contemple em seu texto a importância e a necessidade da argumentação matemática, inclusive desde a infância, ao especificar as Habilidades correlatas a cada Objeto de conhecimento, a argumentação e a demonstração matemática surgem muito timidamente (algumas Habilidades da BNCC envolvem a dimensão hipotético-dedutiva da matemática, mas a frequência destas é muito baixa). As consequências disso podem ser a construção de currículos estaduais e municipais que também abordem esses aspectos timidamente, assim como os planejamentos feitos pelas escolas e pelos professores, conduzindo a uma prática que oportunize muito pouco este tipo de habilidade.

Se o estudante não aprender que deve questionar resultados e buscar conclusões seguras, ele estará sujeito a admitir como verdadeira toda informação que lhe for passada. O discente estará mais inclinado a se questionar se, através do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, ele vier a compreender a importância de uma afirmação Matemática ser ‘provada’ ou, se não alcançarmos uma prova formal que valide, ou não, a afirmação, ao menos possamos construir uma explicação clara e convincente para isso. Este empoderamento da capacidade de refletir criticamente ao analisar a veracidade de uma informação é muito importante para a sociedade.

Portanto, ao instituir seus currículos e elaborar seus planos de ação, secretarias, escolas, professores e professoras precisam explorar habilidades de argumentação e demonstração matemática que extrapolem os limites da BNCC. Não se trata de oportunizar apenas este tipo de habilidade, de forma alguma, mas de garantir que ela seja desenvolvida através de atividades pensadas explicitamente e sistematicamente com esse fim, assim como deve ser feito para as

muitas outras habilidades que compõem o pensamento matemático. O estudante deve reconhecer que alguns casos não representam a totalidade e que não deve considerar situações isoladas para criar generalizações, tornando-se assim um cidadão mais crítico. Em tempos de negacionismo, *fake news* e descrédito da ciência, isso é fundamental.

10 O cisne negro

Era a solução do seu problema que lhe olhava a alguns metros de distância, ele mal podia acreditar. Um cisne negro. Não havia um número mínimo de cisnes brancos que garantisse que todos os cisnes são brancos, mas bastou um único cisne negro para provar que essa proposição é falsa. Demonstração por contraexemplo. No mesmo lugar onde contar não é o suficiente, bastou um único caso para concluir a prova lógica. É o país das demonstrações.

Referências

- Barichello, L. (2021). *Introdução ao Pensamento Computacional*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
<https://umlivroaberto.org/producao/pensamento-computacional/>
- Borba, M. C. (1992). Teaching mathematics: Challenging the sacred cow of mathematical certainty. *The Clearing House*, 65(6), 332-333.
https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmediaseeducacaomatematica/teaching_mathematics-borba1992.pdf
- Borba, M. C.; Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 17(3), 17-23.
http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba_skovsmose/ideology_of_certainty_in_mathematics_education.pdf
- Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. (Elza F. Gomide, Trad.). São Paulo: Edgard Blucher.
- Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Ministério da Educação (MEC).
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação (MEC).
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf
- Devlin, K. J. (2004). *O gene da matemática*. (Sergio Moraes Rego, Trad.). Rio de Janeiro: Record.
- Ellenberg, J. (2015). *O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado*. (George Schlesinger, Trad.). Rio de Janeiro: Zahar.

- Flood, R. (2013). *A história dos grandes matemáticos: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda.
- Garnica, A. V. M. (2002). As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 15(18), 91-99.
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10596>
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas.
<https://ayanrafael.files.wordpress.com/2011/08/gil-a-c-mc3a9todos-e-tc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf>
- Leitão, S. (1999). Contribuições dos estudos contemporâneos da argumentação a uma análise psicológica de processos de construção de conhecimento em sala de aula. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, 51(4), 91-109.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Mendonça, P. C. C.; Justi, R. S. (2013). Ensino-Aprendizagem de Ciências e Argumentação: Discussões e Questões atuais. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, 13(1), 187-216.
<https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4257>
- Moreira, M. A. (1982). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes.
- Pádua, G. L. D. (2009). A Epistemologia Genética de Jean Piaget. *Revista FACEVV*, (2), 22-35.
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4627078/mod_resource/content/1/Artigo_A%20epistemologia%20gen%C3%A9tica%20de%20Jean%20Piaget.pdf
- Teixeira, R. C.; Morgado, A. C. (2011). *Introdução à Teoria da Probabilidade*. [Notas de aula do curso Introdução à Probabilidade, lecionado na Fundação Getúlio Vargas].
<https://www.professores.uff.br/ralphteixeira/wp-content/uploads/sites/129/2017/09/probbook.pdf>
- Warsi, K. (2020). *O livro da matemática*. (Maria da Anunciação Rodrigues, Trad.). Rio de Janeiro: Globo livros.
- Wenzel, J. W. (1993) Rhetoric and Argumentation: An Introduction. *Informal Logic*, 15(1), 1-3. <https://doi.org/10.22329/il.v15i1.2464>