

O impacto da Matemática nas condições e restrições da formação de engenheiros: o caso da função afim

The impact of mathematics on the conditions and constraints of engineering training: the case of the affine function

Renato da Silva Ignácio^{1*}

 <https://orcid.org/0000-0003-0448-3241>

Paola Andrea Gaviria Kassama^{2**}

 <https://orcid.org/0000-0001-5394-7845>

Miriam do Rocio Guadagnini^{3***}

 <https://orcid.org/0000-0001-9145-9252>

Marlene Alves Dias^{4****}

 <https://orcid.org/0000-0001-9168-9066>

Resumo

Apresentamos um estudo sobre as relações pessoais esperadas dos estudantes de um curso de Engenharia sobre função afim, centrado no estudo de documentos curriculares oficiais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, visto que, para o desenvolvimento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, é fundamental mobilizar conhecimentos sobre função afim. O objetivo da pesquisa foi identificar se as expectativas institucionais esperadas e existentes para o processo de ensino e aprendizagem da noção de função afim são coerentes e se estão em consonância com as relações pessoais esperadas dos estudantes que iniciam o Ensino Superior. O referencial teórico central é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e os referenciais de apoio são as abordagens de quadro; níveis de conhecimento esperados dos estudantes e pontos de vista. Trata-se de uma pesquisa documental, segundo Godoy. As análises auxiliaram a compreender as relações pessoais, que se espera, tenham sido desenvolvidas pelos estudantes em função das relações institucionais esperadas e existentes e seu impacto na formação dos engenheiros. Mas os resultados do SARESP indicam um desacordo com as relações institucionais.

Palavras-chave: TAD. Macroavaliações SARESP. Função Afim. Quadros. Pontos de vista.

Abstract

We present a study on the personal relations expected from students from an Engineering course on affine function centered on the study of official curriculum documents of Middle and High School, since, for the development of the Differential and Integral Calculus discipline, it is essential to mobilize knowledge about affine function. The

Recebido em: 05/09/2024 - Aceito em: 12/11/2024

^{1*} Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Paraíba, Brasil. E-mail: renatosignacio@gmail.com

^{2**} Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema, São Paulo, Brasil. E-mail: andrea.gaviria@unifesp.br

^{3***} Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: miriamguadagnini@ufg.br

^{4****} Instituto Federal do Ceará (IFCE), colaboradora, Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: maralvesdias@gmail.com



Μαθηματικά: epistemologia e educação, Caruaru (PE), v.2, 2024

<https://doi.org/10.51359/2965-1794.2024.264080>

Esta obra está licenciada com uma [Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

objective of the research was to identify if the expected and existing institutional expectations for the teaching and learning process of the notion of function are coherent and are in line with the personal relations expected from students who start higher education. The central theoretical framework is the Anthropological Theory of Didactics by Chevallard and the supporting frameworks are frame approaches; expected knowledge levels of students and points of view. It is a documentary research according to Godoy. The analyzes helped us to understand the personal relations that were expected to have been developed by the students due to the expected and existing institutional relations and their impact on the training of engineers. However, the results of SARESP indicate disagreement with institutional relations.

Keywords: ATD. Macro Assessments. SARESP. Affine Function. Frames. Views Points.

1 Introdução

Nos cursos das Engenharias, um fenômeno chama a atenção dos professores: a rápida transformação do sentimento de entusiasmo dos estudantes em frustração antes de concluir o primeiro semestre letivo de curso. Essa percepção empírica é traduzida em altas taxas de retenção e evasão registradas logo nos dois primeiros anos do curso, o que corrobora as orientações das DCNs da Engenharia (Brasil, 2019), cujo artigo 7º indica a importância do projeto pedagógico de o curso (PPC) prever um sistema de acolhimento e nivelamento visando à diminuição da retenção e da evasão, como podemos notar na citação que segue.

Art. 7º Com base no perfil dos seus ingressantes, o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) deve prever os sistemas de acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão, ao considerar: I - as necessidades de conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso de graduação em Engenharia; II - a preparação pedagógica e psicopedagógica para o acompanhamento das atividades do curso de graduação em Engenharia; e III - a orientação para o ingressante, visando melhorar as suas condições de permanência no ambiente da educação superior. (Brasil, 2019, p.4).

Essa frustração se converte em desistência e evasão dos egressos. O Conselho Nacional de Educação (CNE) brasileiro, atento à necessidade de oferecer respostas a essa problemática, homologou e publicou, em 2019, o parecer que define as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (DCNs de Engenharia) (Brasil, 2019).

De acordo com dados das DCNs de Engenharia, o Brasil perdeu 22 posições no ranking, entre 2011 e 2016, no Índice Global de Inovação (IGI), sendo um dos fatores associados a esse desempenho a fraca pontuação no que se refere aos recursos humanos e à pesquisa.

A quantidade de engenheiros por habitantes no Brasil também representa um fator preocupante para as novas diretrizes para o curso de graduação em Engenharia. O estudo comparativo da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) (Brasil, 2016) revelou que o Brasil registra a proporção de 4,8 engenheiros para cada 10 mil



habitantes, ocupando as últimas posições entre os países membros da OCDE.

O parecer do CNE mostra que houve avanços, apresentando números que revelam a expansão significativa do número de matriculados e concluintes nos cursos de Engenharia. Contudo os dados do Indicador de Fluxo da Educação Superior do INEP de 2019 evidenciam que 68,74% dos alunos desistiram do Ensino Superior de Engenharia entre 2012 e 2019. Essa taxa de evasão coincide com a percepção dos professores desses cursos, isto é, os estudantes iniciam o curso motivados e, nos dois primeiros anos, desistem de seus projetos.

Um conjunto de fatores, tais como: a desmotivação, a taxa elevada de evasão, pode estar relacionado à falta de conhecimentos prévios desses estudantes em Matemática, o que instigou os autores deste artigo a investigarem esse fenômeno, do ponto vista da Didática da Matemática, para compreender o que ocorre na transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior com os estudantes do curso de Engenharia em se tratando especificamente dos conhecimentos de Matemática. Particularmente, nossa questão de pesquisa pode ser enunciada da seguinte forma: Quais conhecimentos prévios sobre a noção de função afim são esperados dos estudantes que iniciam o curso de Engenharia e, entre eles, os que são considerados mobilizáveis ou disponíveis?

Iniciamos observando que as funções de uma variável independente são conhecimentos essenciais na formação dos futuros engenheiro, pois eles deparam com situações-problema reais, que envolvem, por exemplo, o comportamento de um material submetido à carga ou força, pois toda substância real em maior ou menor medida sofre deformações e mudanças de forma, volume, comprimento, entre outras, sob os efeitos de forças que lhe forem aplicadas. Na formação de um engenheiro, são imprescindíveis o estudo e o conhecimento da resistência dos materiais para a análise de estruturas em geral, pois é essencial saber o quanto um material resiste a um dado esforço e o quanto um material se deforma e/ou se desloca sob determinadas condições.

Os estudos da rigidez e resistência de materiais e a deformação e tensão dos mesmos exigem o conhecimento prévio de funções de uma variável como a função afim, que serve de base para a compreensão da noção de derivada de uma função, um dos primeiros conceitos introduzidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no primeiro ano do curso de Engenharia.

A partir da nossa questão de pesquisa e da escolha do conteúdo matemático a ser analisado, iniciamos a investigação desde o ano de 2002, estudando o relatório do Sistema de



Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) (São Paulo, 2002 até 2022) para compreender as dificuldades encontradas pelos estudantes na transição entre o Ensino Fundamental - anos finais (EFaf) e o Ensino Médio (EM), já que a noção de função afim é introduzida no Ensino Fundamental e revisitada e ampliada no Ensino Médio, portanto, seria um dos conhecimentos tratados nessa avaliação.

A análise desses documentos nos conduziu aos gráficos das **figuras 1, 2 e 3** que seguem, nos quais podemos observar a variação do nível de proficiência dos estudantes que realizaram a prova nos anos de 2017, 2018, 2021 e 2022.

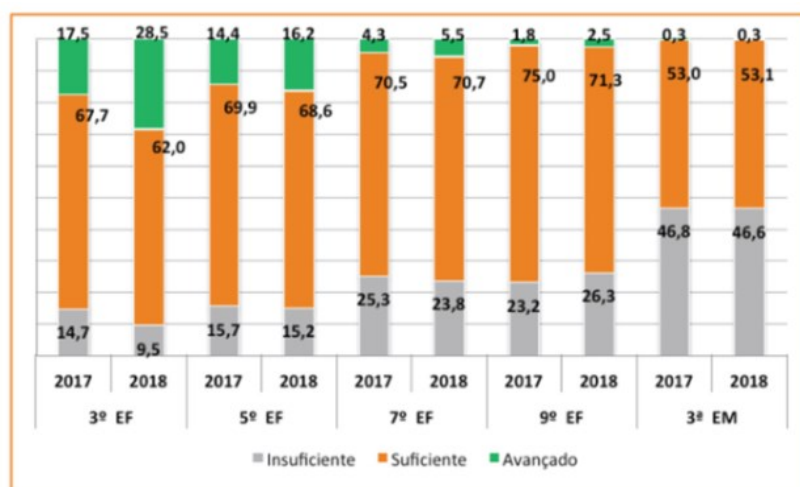


Figura 1: Percentuais de estudantes por nível de proficiência de Matemática agrupados em três categorias

Fonte: São Paulo, 2018, p.72.

Analizando o gráfico da **figura 1**, podemos ressaltar que no Ensino Fundamental - anos iniciais (EFai), é perceptível uma tendência de melhora, que é acompanhada pelos resultados dos estudantes do Ensino Fundamental - anos finais (EFaf), mesmo se a maior parte dos estudantes se encontram na categoria suficiente. O que chama a atenção é que, a partir de 2018, ocorreu um aumento de estudantes no nível insuficiente para o 9º ano do Ensino Fundamental anos finais (EFaf). Os dados de 2017 e 2018 para o Ensino Médio (EM) mostram uma realidade que pode auxiliar-nos a compreender a evasão de alunos nos cursos de graduação em Engenharia, uma vez que apenas 0,3% dos estudantes atingem o nível avançado, que seria o mais apropriado para estudantes que optam por esses cursos. Ressaltamos ainda o interesse da apresentação dos resultados por meio de uma representação em que são considerados o ano de aplicação da prova e o ano anterior, pois o objetivo da avaliação SARESP é monitorar o avanço da educação no estado e subsidiar intervenções técnico-pedagógicas.

Gráfico 12 – Percentuais de Estudantes por Nível de Proficiência Agrupado -
Matemática – Rede Estadual – SARESP 2021

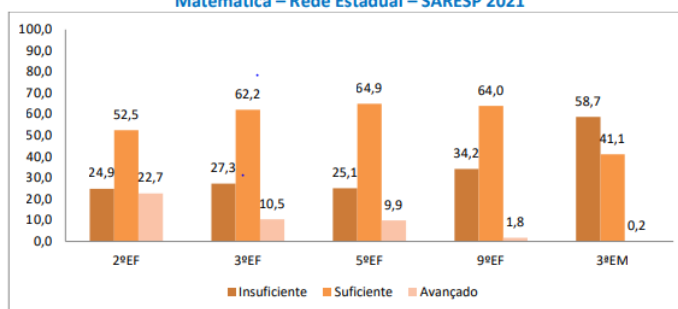


Figura 2: Percentuais de estudantes por nível de proficiência de Matemática agrupados em três categorias

Fonte: São Paulo, 2021, p.51.

No gráfico da **figura 2**, que corresponde ao ano de 2021, após a pandemia do SARS-Cov-2 (Covid 19), observamos a introdução do 2º e 3º ano dos anos iniciais e a retirada do 7º ano do EFaf e, ao compararmos com os dados de 2018, verifica-se uma queda no desempenho dos estudantes. Enquanto em 2018 o percentual de estudantes do 3º ano dos anos iniciais classificados no perfil avançado era de 28,5 pontos, este número despenca em 2021 para 10,5 pontos. Situação similar, porém menos brusca, é evidenciada no 5º ano do EFai, variando de 16,2 para 9,9 pontos. Existe um aumento percentual de insuficiente para o 9º ano do EFaf e para o 3º ano do EM e o de suficiente e de avançado diminui para ambos. Segundo o relatório da SARESP São Paulo (2021), o desempenho dos estudantes na edição de 2021 foi o pior dos últimos 11 anos. O relatório revela que estudantes do 5º e 9º ano do EF tiveram um desempenho próximo ao apresentado por estudantes do mesmo ano escolar em 2013 e 2015, respectivamente. Fica evidente a diferença entre os conhecimentos que os estudantes tinham antes e dispunham depois da pandemia, indicando o impacto dessa crise pandêmica no sistema de educação paulista, em particular para os estudantes dos últimos anos do EFaf e EM que, dependendo de suas escolhas em prosseguir seus estudos, podem apresentar dificuldades que precisam ser consideradas, mais especificamente para aqueles que escolhem a área de Matemática e Ciências, como é o caso das Engenharias. Observamos que em 2020 a prova SARESP não foi aplicada devido à pandemia.

Gráfico 12 – Percentuais de Estudantes por Nível de Proficiência Agrupado -
Matemática – Rede Estadual – SARESP 2022

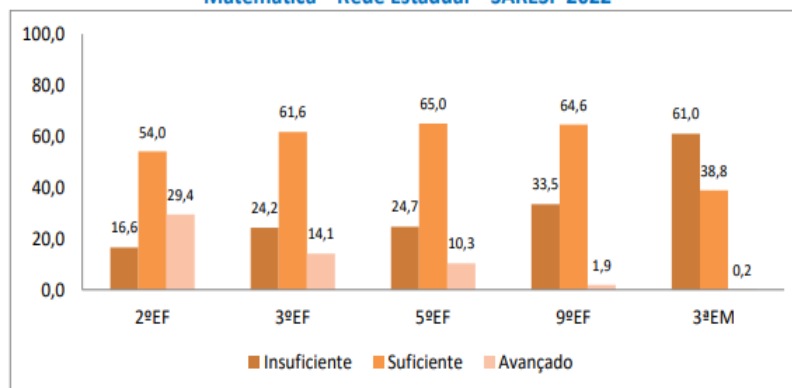


Figura 3: Percentuais de estudantes por nível de proficiência de Matemática agrupados em três categorias

Fonte: São Paulo, 2022, p. 52

Em relação ao gráfico da **figura 3**, observamos que foi inserido o resultado do 2º ano do Ensino Fundamental – anos iniciais e que apenas 54% dos estudantes apresentam o nível suficiente. Para os outros estudantes, ao compararmos os resultados dos anos 2017, 2018 e 2022, observamos que houve uma queda significativa de estudantes no nível avançado para o 3º e 5º anos do Ensino Fundamental – anos iniciais. Já, para o Ensino Fundamental – anos finais, são apresentados apenas os resultados do 9º ano, que mostram um aumento significativo de estudantes no nível insuficiente. Os dados do 3º ano do Ensino Médio indicam um aumento expressivo de estudantes no nível insuficiente, ou seja, os resultados que vinham melhorando pouco a pouco antes da pandemia seguem o sentido contrário, pois mostram aumento de dificuldades com a Matemática, o que indica a necessidade de vigilância constante para auxiliar os estudantes a aumentarem as respectivas proficiências em Matemática. Esses resultados podem impactar ainda mais as dificuldades encontradas para seguir um curso de Engenharia, elevando assim a disparidade entre o número de engenheiros para cada 10 mil habitantes como ressaltado no documento da OCDE de 2016.

Certamente, existem outros elementos e gráficos nos relatórios SARESP analisados, contudo, a partir desses gráficos e da nossa questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo da pesquisa: Identificar, por meio da análise de documentos curriculares oficiais, as expectativas institucionais esperadas e existentes para o processo de ensino e aprendizagem da noção de função afim para compreender se estas são coerentes e se estão em consonância com as relações pessoais esperadas dos estudantes.

Para atingir nosso objetivo, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e seus colaboradores e, como



referenciais teóricos de apoio, as noções de quadro e mudança de quadros, segundo Douady (1984, 1992); a noção de pontos de vista, conforme Rogalski (2013); e as noções de níveis de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes, consonantes com as definições de Robert (1997, 1998).

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter documental, que procura identificar os conhecimentos prévios sobre a noção de função afim que podem ser mobilizados pelos estudantes do estado de São Paulo que concluem o Ensino Médio.

Os resultados tendem a mostrar que as dificuldades dos estudantes podem estar associadas à falta de coerência entre as propostas institucionais e a macroavaliação SARESP, realizada anualmente. Essa avaliação parece ter pouca influência sobre as mudanças necessárias para auxiliar os professores no desenvolvimento de tarefas que motivem seus estudantes, mas revela a importância da Matemática para as outras Ciências e para as profissões futuras que demandam pessoas com uma formação que ultrapassa a aplicação de conhecimentos, por exigir um raciocínio lógico e criativo que auxilie o profissional a enfrentar os desafios diários que surgem, principalmente, em função das novas tecnologias.

Após essa breve apresentação da pesquisa, passamos ao referencial teórico, cujas ferramentas serviram de base para as análises.

2 Referencial teórico da pesquisa

Iniciamos pelo referencial teórico central, isto é, as ferramentas didáticas de análise definidas por Chevallard e seus colaboradores, que fundamentam a Teoria Antropológica do Didático, na sequência TAD.

A opção pela TAD está associada ao seu foco que, segundo Chevallard (2011), corresponde ao estudo científico do didático, cuja existência, para o autor, é considerada quando alguma instância (pessoa ou instituição) aprende alguma coisa, isto é, quando alguém estuda alguma coisa, o que indica a coexistência entre o didático e o estudo ou ainda o estudo de um objeto O, que corresponde a um desafio didático, podendo esse estudo ser acompanhado ou não por um professor. Como exemplo, podemos considerar o estudo das relações pessoais esperadas dos estudantes por meio de documentos curriculares oficiais, uma vez que esses documentos fazem parte do conjunto das instituições da sociedade brasileira, incluindo escolas e profissões.

Após definir didático, Chevallard (2011) questiona-se sobre o papel da Didática na sociedade e a define como a ciência das condições e restrições de difusão dos conhecimentos



na sociedade. Ainda segundo o autor, a didática se insere na TAD, uma vez que essa teoria é composta por um conjunto de saberes que constituem um ferramental que possibilita observar, analisar, avaliar e desenvolver o didático em qualquer instituição e para qualquer desafio didático. Além disso, trata-se de uma teoria antropológica, porque o estudo científico do didático deve estar atento para outras dimensões do real social, não se atendo apenas à dimensão do didático.

Desse modo, para estudar a organização matemática e didática ou praxeologia matemática e didática da noção de função afim na transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior, utilizamos as seguintes ferramentas de análise da TAD: relações institucionais e pessoais, organizações praxeológicas ou praxeologias, objetos ostensivos e objetos não ostensivos, “topos” do professor e do estudante e níveis de codeterminação, que apresentamos na sequência.

Chevallard (1992) introduz a TAD, observando que se trata de uma teoria quase axiomática, para a qual, os elementos primitivos são: instituição (I), pessoas (X) e objetos (O), sendo as instituições que impõem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e pensar. Um exemplo de instituição é a escola que, no Brasil, segue as orientações federais, estaduais e/ou municipais que indicam formas de encaminhar o estudo com os estudantes.

Existem ainda outras instituições, como universidades, empresas, entre outras, e as instituições transpositivas, que transformam os saberes científicos para fins de ensino, sendo essas de responsabilidade na noosfera, que corresponde à esfera onde se pensa o funcionamento do sistema didático. Ela é composta pelo presidente de uma associação de ensino, por uma comissão ministerial, por representantes da sociedade, entre os quais, o autor destaca: os pais, os especialistas da disciplina e os emissários do corpo político.

Chevallard (1992) explicita ainda que, na TAD, um objeto (O) é toda entidade, material ou não, que existe para ao menos uma pessoa, de modo que existem objetos matemáticos como a noção de função afim e objetos materiais como a escova de dente, o livro didático, entre outros. Desse modo, na TAD tudo é objeto, mas é preciso distinguir tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, uma vez que, ao se submeterem às instituições, eles contribuem para fazê-las viverem.

Ao considerar a noção de relação com um objeto (O), Chevallard (1997) observa que o conhecimento (individual) e o saber (institucional) remetem às práticas sociais realizadas nas

instituições que utilizam o objeto (O). Por exemplo, para o objeto função afim, ao analisarmos como esse objeto é estudado no Ensino Fundamental - anos finais, no Ensino Médio e no Ensino Superior, podemos compreender o que se esperar como conhecimento prévio disponível dos estudantes na passagem de uma etapa escolar à outra.

Após explicitar que o saber matemático é uma forma particular de conhecimento, fruto da ação humana institucional, o autor diz ser necessário um método que possibilite descrever e estudar as condições de execução dessas práticas sociais com a Matemática. Para tal, Chevallard (1992) introduz as noções de relações institucionais e pessoais como método indicado para descrever e estudar as práticas sociais com a Matemática.

Isso conduz Chevallard (2007) a introduzir a noção de relação pessoal com um objeto O, como sendo a relação que, pelo menos uma pessoa x mantém com o objeto O, representada por $R(x, O)$, e relação institucional I a esse mesmo objeto O, como toda relação nutrida por, pelo menos, uma instituição com o objeto O, indicada $R_I(O)$. Desse modo, ao se submeter à instituição I, a relação pessoal $R(x, O)$ de um indivíduo x vai construir-se ou se modificar para atender às exigências de $R_I(O)$. Essa construção ou mudança é considerada pelo autor como a aprendizagem, sendo a mesma variável, dependendo da forma como o indivíduo x conhece O, como por exemplo, apenas “ouviu falar” de O ou se trata de um especialista de O.

Ressaltamos aqui que essa noção de aprendizagem depende das diferentes instituições a que o indivíduo é submetido, ou seja, a família, a escola, a sociedade, entre outras, e do tipo de relação a que o indivíduo se submete, quando se submete a essa instituição. Isso tende a mostrar que as macroavaliações, em geral, são incompreendidas pelos estudantes, uma vez que consideram apenas uma determinada relação institucional com o objeto O, que muitas vezes não corresponde à relação pessoal do indivíduo com a relação institucional em jogo. Observamos que essa ressalva indica a importância de o professor estar atento ao processo de ensino e aprendizagem, realizando avaliações formativas, somativas e comparativas, pois esse processo não pode ser avaliado apenas por meio de avaliações diagnósticas do tipo macroavaliações. Além disso, a realização de outras formas de avaliação pelo professor é uma função que se insere no “*topos*” do professor e que não pode ser ignorada pelas instituições de ensino.

Observamos ainda que as noções de relação institucional e relação pessoal possibilitam verificar se existe coerência entre o processo de ensino e aprendizagem e as macroavaliações, uma vez que podemos identificar se o que é pedido foi desenvolvido, pois, segundo Chevallard



(2007), conteúdos e formas de conhecimento dependem do que o indivíduo faz com o objeto de estudo.

Para refinar o estudo das relações institucionais e pessoais, Chevallard (1997) introduz a noção de praxeologia, que, segundo o autor, trata-se de uma ferramenta de modelagem detalhada das práticas matemáticas. A palavra praxeologia vem de *práxis*, palavra grega que indica o bloco do saber fazer, sendo esse composto de tipo de tarefa T e técnica σ , indicado $[T, \sigma]$ e de *logos*, palavra grega que indica o bloco do saber, sendo esse composto pela tecnologia θ e pela teoria Θ , indicado $[\theta, \Theta]$, sendo assim, uma praxeologia é representada pela quádrupla $[T, \sigma, \theta, \Theta]$. O autor distingue ainda duas organizações nas tarefas professorais, a saber: as praxeologias matemáticas e didáticas.

Bosch e Chevallard (1999) esclarecem que o estudo ecológico institucional das praxeologias, isto é, da construção e da vida delas nas instituições de ensino, produção, utilização e transposição, faz parte do coração da Didática da Matemática.

Outra ferramenta importante proposta pela TAD é a noção de sistema didático que, consoante Chevallard (2011), é composto por três instâncias, a saber: um estudante x ou um conjunto de estudantes X , um professor y ou um grupo de professores Y e um desafio didático $\heartsuit$, que compõem o sistema didático $S(X, Y, \heartsuit)$, no qual, X corresponde ao conjunto de instâncias x , aquelas que desejam aprender alguma coisa, a instância Y indica o conjunto de y que deseja auxiliar X a aprender alguma coisa e a instância $\heartsuit$ (desafio didático), que geralmente é uma obra designada para ser estudada por X com a ajuda de Y .

Para melhor compreender as condições e restrições que governam o sistema didático, Chevallard (2007) introduz a noção de níveis de codeterminação didática, que possibilitam análise das condições e restrições que determinam o processo de difusão praxeológico. O autor observa que uma condição ou restrição pode situar-se em um nível da escala, mas exprimir-se nos outros, por exemplo: não podemos separar o que se passa em uma classe do conjunto do sistema de ensino.

A escala dos níveis de codeterminação é representada a partir do nível mais alto, humanidade, ao nível mais baixo, tópicos: Humanidade $\leftrightarrow$ Civilização $\leftrightarrow$ Sociedade $\leftrightarrow$ Escola $\leftrightarrow$ Pedagogia $\leftrightarrow$ Sistema Didático $\leftrightarrow$ Disciplina $\leftrightarrow$ Domínios $\leftrightarrow$ Setor $\leftrightarrow$ Temas $\leftrightarrow$ Tópicos.

De acordo com Chevallard (2002), o professor tem pouca influência sobre o sistema didático, funcionando, geralmente, apenas sobre temas e tópicos, o que pode provocar uma atomização do material de estudo, conduzindo à reconstrução de fragmentos das obras a serem

estudadas. Por exemplo, no estudo da noção de função afim, é preciso associar o que foi desenvolvido no Ensino Fundamental com a revisita e o novo tratamento introduzido no Ensino Médio, isto é, a associação entre a definição por meio de relação entre grandezas e a definição por meio de relação entre conjuntos. Além disso, no Ensino Superior, ainda é preciso que o professor mostre a importância da noção de função afim, quando do estudo da noção de derivada de uma função.

Para o estudo das praxeologias associadas às diferentes noções matemáticas, no nosso caso, a noção de função afim, consideramos os objetos ostensivos e objetos não ostensivos que, segundo Chevallard (1994), são os “ingredientes que compõem as técnicas, isto é, os objetos ostensivos são aqueles que têm para o indivíduo uma forma material, sensível, mas também são considerados objetos ostensivos os gestos, as palavras, os esquemas, os formalismos, entre outros, isto é, os objetos ostensivos são os objetos a serem manipulados, quando do desenvolvimento de uma técnica. Mas Chevallard (1994) explica que essa manipulação é acompanhada de outro objeto, que corresponde às noções, aos conceitos e às ideias que são evocados durante a manipulação dos objetos ostensivos aos quais estão associados, ou seja, equivalem aos objetos não ostensivos. Como exemplo, podemos considerar a expressão “função afim” que, ao ser evocada, representa um objeto não ostensivo que podemos manipular por meio da identificação de uma noção associada a esse objeto não ostensivo e de uma de suas formas de manipulação, que corresponde ao objeto ostensivo, por exemplo o objeto ostensivo representação algébrica e o objeto ostensivo representação gráfica.

Chevallard (1994) esclarece ainda que toda técnica supõe a ativação de um complexo de objetos, tanto os objetos ostensivos, como os objetos não ostensivos, de modo que a manipulação dos objetos ostensivos seja regada pela evocação dos objetos não ostensivos, o que indica a existência de uma dialética necessária entre eles. No exemplo da noção de função afim, observamos que, no estudo dessa função, necessitamos definir os objetos ostensivos e objetos não ostensivos que nos auxiliaram a compreender o funcionamento das diferentes técnicas introduzidas nas diferentes etapas escolares.

Como anunciado na introdução, além das ferramentas indicadas na TAD, consideramos ainda as noções de quadros e mudança de quadros, conforme Douady (1984, 1992), por considerá-las importantes para analisar as articulações entre os diferentes quadros estudados durante a Educação Básica e, mais especificamente, as noções que servem de ferramentas explícitas para os estudantes que seguem o Ensino Superior na área de exatas e, mais



particularmente, os cursos de Engenharia.

Iniciamos observando que Douady (1984, 1992), influenciada pela análise epistemológica do trabalho do matemático profissional, evidencia a dualidade dos conceitos matemáticos, que funcionam inicialmente como ferramentas implícitas antes de adquirirem o status de objetos matemáticos e serem desenvolvidos como tal.

A autora indica ainda o papel das mudanças de quadros nas atividades dos matemáticos profissionais, o que a conduz a considerar, em sua abordagem teórica, a noção de jogos de quadros. Para Douady (1984, 1992), uma ferramenta implícita equivale a um conceito em elaboração, processo este que pode durar vários anos. Já uma ferramenta explícita está associada a um conceito ou a uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema. Por exemplo, a função afim é utilizada enquanto ferramenta explícita, quando o aluno aplica a noção de função afim para o estudo do crescimento ou decrescimento de uma função por meio da noção de derivada de uma função real a valores reais.

Douady (1984, 1992) define objeto como um componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente. Para a autora, o objeto matemático é parte de um edifício mais amplo, que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina quadro, que corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. De acordo com Douady (1984, 1992), as imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Após definir quadro, a autora pondera sobre as mudanças de quadro, que correspondem aos meios utilizados pelos matemáticos para obter formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e tornam possível utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas à formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, ensejando assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho. A autora adapta a noção de mudança de quadros para o processo de ensino e aprendizagem por meio da noção de jogos de quadros, que são transposições didáticas das mudanças de quadros, organizadas pelos professores, enquanto meios privilegiados de provocar desequilíbrios cognitivos que serão ultrapassados em reequilíbrios de nível superior. Em nossa pesquisa, identificamos os



seguintes quadros: quadro da Aritmética, quadro algébrico, quadro geométrico, quadro lógico conjuntivista e quadro das situações contextualizadas.

Outra noção utilizada na pesquisa é a de pontos de vista, introduzida por Rogalski (2001). O autor explicita que essa noção traduz-se em maneiras diferentes de observar, fazer funcionar e, eventualmente, definir um objeto matemático. O autor associa a noção de ponto de vista à noção de quadro, frisando que observar um objeto em diferentes quadros é um exemplo de diferentes pontos de vista, mas é possível também considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro.

Ao fazer essa associação, Rogalski (2001) assinala que trabalhar em um determinado quadro significa estudar um problema por meio de uma teoria bem definida, em que dados, enunciados e as primeiras ferramentas estão relacionados a um determinado campo conceitual, o que remete a um domínio de trabalho no qual podem existir diferentes quadros e, para esses, é possível encontrar relações de encaixe, interseções não vazias com fronteiras imprecisas.

Em Rogalski (2013), encontramos as noções de pontos de vista: “relação entre grandezas” e “relação entre conjuntos”, que nos auxiliaram nas análises sobre o processo de ensino e aprendizagem das funções, uma vez que, segundo Rogalski (2013), o ponto de vista relação entre grandezas, que se estende desde a antiguidade até o início do século XVII, utilizou as relações entre as grandezas para descrever os fenômenos da natureza. Ainda conforme o autor, o estudo das relações entre grandezas não apresenta uma concepção geral e foi utilizado para resolver problemas de Astronomia, Física e Mecânica.

Já, o ponto de vista relação entre conjuntos corresponde à segunda definição de Euler e às definições de Cantor e Bourbaki. Observamos que se trata do ponto de vista desenvolvido no Ensino Médio no Brasil.

Consideramos ainda a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes, pois o nível esperado deve ser o disponível, mas os outros podem ser trabalhados em função do nível de conceituação escolhido para ser desenvolvido com os estudantes.

Apresentamos inicialmente a noção de nível de conceituação, definido por Robert (1997), que se refere aos marcos possíveis de serem identificados, quando do ensino de determinado campo conceitual. Em geral, as noções matemáticas podem ser abordadas em diferentes níveis de conceituação, entretanto a autora pontua que esses níveis são parcialmente encaixados. Desse modo, os objetos matemáticos mudam e podem tornar-se mais gerais, o que favorece introduzir novas estruturas que, por sua riqueza, podem exigir novo formalismo. A



autora esclarece que os exercícios teóricos de determinado nível correspondem aos teoremas do nível seguinte. O encaixe com suas interseções indicados na definição de níveis de conceituação nos sinaliza a existência de várias formas de apresentação, de modo que não existe uma hierarquia absoluta; esses níveis são atingidos à medida que ocorre o ensino efetivo.

Sendo assim, ao considerar que o ensino das noções matemáticas está associado a um campo conceitual e elas podem ser apresentadas em função de uma escolha, que certamente depende dos conhecimentos prévios dos estudantes, Robert (1997, 1998) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes: o técnico, o mobilizável e o disponível.

O *nível técnico* circunscreve-se a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em determinada tarefa. Exemplo: Dada a função afim $f(x) = 3x - 1$, determinar o valor de $f(x)$ ou y para $x = -1, 2$ e 5 .

O *nível mobilizável* corresponde a um início de justaposição de saberes de certo domínio, podendo até estar atrelado a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter “ferramenta” e o caráter “objeto” do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é *explicitamente* pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado, se for acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: Determinar o zero da função $f(x) = 3x - 1$.

O *nível disponível* significa conseguir responder corretamente ao que é proposto sem indicações, poder dar contraexemplos, mudar de quadro e aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, que o estudante sabe que conhece, ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Exemplo: O funcionário de RH de uma empresa precisa justificar para o seu diretor por que escolhe as empresas de locação de automóveis X e Y, dependendo da quilometragem a ser utilizada. Sabendo que a empresa X cobra uma taxa inicial de 20,00 reais mais 5,00 reais por quilômetro rodado e que a empresa Y cobra 30,00 reais de taxa inicial e 4,00 reais por quilômetro rodado, descreva matematicamente como o funcionário do RH poderia justificar suas escolhas.

O referencial teórico retroapresentado nos auxiliou na escolha dos métodos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa e na construção do instrumento de análise “grade de análise”, que descrevemos na sequência.



3 Metodologia

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, desenvolvida por meio do método da pesquisa documental, uma vez que se propõe a identificar relações institucionais esperadas e existentes, em particular das organizações matemáticas e didáticas, que se supõe estarem sendo trabalhadas atualmente na Educação Básica e no Ensino Superior, considerando especificamente o primeiro ano de um curso de Engenharia.

Godoy (1995, p.21) define a pesquisa qualitativa como um fenômeno que será “*melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada.*”

Desse modo, caracterizamos nosso estudo como pesquisa qualitativa e nos identificamos com a definição de Godoy, pois o fenômeno por nós estudado corresponde ao estudo das condições e restrições impostas pelas relações institucionais esperadas e existentes e pelas relações pessoais esperadas dos estudantes sobre a noção de função afim, observando que essa noção é introduzida no 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais, revisitada e ampliada no primeiro ano do Ensino Médio e utilizada como ferramenta explícita, conforme definição de Douady (1984, 1992) apresentada no referencial teórico em disciplinas do curso de Engenharia no Ensino Superior, mais particularmente, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para o primeiro ano desse curso.

Os métodos de pesquisa são denominados por Godoy (1995) como caminhos, entre os quais, encontramos o método da pesquisa documental que, enquanto pesquisa qualitativa, implica a coleta e análise de vários dados para que se entenda o fenômeno, que parte de uma questão ampla e que supõe a divisão em subquestões que permitem visitar o fenômeno por meio de diferentes caminhos.

Godoy (1995) destaca ainda o papel inovador da pesquisa documental que, para o estudo do processo de ensino e aprendizagem, nos parece trazer contribuições importantes, se centrarmos nosso olhar para o que é indicado para ser desenvolvido e o que é realmente trabalhado com os estudantes das diferentes etapas escolares.

Consideramos que esse tipo de pesquisa favorece também compreender a transição entre as etapas indicadas para a introdução, ampliação e aplicação das noções matemáticas, em particular aquelas que atravessam praticamente toda a Educação Básica e são utilizadas na própria Matemática e nas outras ciências no Ensino Superior.

Nesta pesquisa, utilizamos diferentes documentos, destacados na sequência. Para a



análise das relações institucionais esperadas, recorreremos aos documentos curriculares oficiais para os Ensinos Fundamental e Médio: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN) (Brasil, 1998) para o Ensino Fundamental - anos finais (EFaf); Orientações Curriculares para o Ensino Médio (EM) (Brasil, 2006); Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e o Guia de transição de Matemática para o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio e o Currículo Paulista, emanados da Secretaria de Educação de São Paulo (São Paulo, 2018, 2019) e, para o Ensino Superior (ES): Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia (DCNCE) (Brasil, 2019) e os planos de ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de uma universidade pública de São Paulo.

Para o estudo das relações institucionais existentes, analisamos os livros didáticos: Matemática – Projeto Teláris – Luiz Roberto Dante, na sequência Dante (2016); Matemática – Projeto Teláris essencial – Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, na sequência Dante; Viana (2022); Matemática: Contexto e aplicações – Luiz Roberto Dante, na sequência Dante (2017); Multiversos Matemática: Funções e suas aplicações – Joamir Souza, na sequência Souza (2021); Cálculo, James Stewart, na sequência Stewart (2015).

Para o estudo das relações pessoais esperadas dos estudantes, recorreremos aos dados da macroavaliação SARESP dos anos de 2002 a 2022, por ser uma avaliação anual do rendimento escolar dos estudantes do estado de São Paulo, estando inserida no contexto de realização da pesquisa.

Os documentos escolhidos para o desenvolvimento da pesquisa são aqueles que nos auxiliam a encontrar respostas para questões associadas à problemática definida; no caso, questiona-se como é tratada a noção de função afim a partir de sua introdução no Ensino Fundamental, a revisita e ampliação no Ensino Médio e de sua utilização como ferramenta explícita na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no primeiro ano do Ensino Superior.

A análise dos documentos escolhidos seguiu as seguintes fases: 1) Construção de uma Grade de Análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar, tanto as organizações matemáticas e didáticas esperadas e existentes, como as expectativas em termos de conhecimentos prévios esperados dos estudantes que iniciam a graduação no Ensino Superior. 2) Análise das diferentes formas de organização matemática e didática esperadas, quando da introdução da noção da função afim, por meio da pesquisa documental retroenunciada, considerando documentos curriculares oficiais indicados anteriormente. 3) Análise das organizações matemática e didática existentes por meio da Grade de Análise



construída com esse objetivo, via material didático, livros didáticos considerados anteriormente. 4) Análise das relações pessoais esperadas, isto é, das expectativas institucionais em relação aos conhecimentos prévios disponíveis dos estudantes que concluem o Ensino Médio. Essa análise foi realizada por meio da macroavaliação SARESP, que abrange a maior parte dos estudantes da Educação Básica do estado de São Paulo.

3.1 A grade de análise

A grade de análise é uma ferramenta didática por nós utilizada para a análise dos documentos curriculares oficiais, mais particularmente, dos livros didáticos adotados atualmente nos ensinos Fundamental - anos finais, Médio e Superior. Ela torna possível evidenciar os tipos de tarefas típicas de cada etapa da escolaridade, possibilitando também compreender as articulações de quadros e os pontos de vista desenvolvidos nas etapas escolares consideradas na pesquisa, o que pode auxiliar na identificação de possíveis praxeologias a serem introduzidas no primeiro ano da universidade, quando se revisita a noção de função afim.

Observamos que o estudo da noção de função afim nas etapas escolares consideradas foi conduzido de modo a dar destaque às noções de:

- Variável dependente, independente e incógnita;
- Conjunto finito e infinito;
- Conjunto dos números reais, suas operações e propriedades;
- Conceito de função afim;
- Lei de formação de uma função afim;
- Gráfico da função afim;
- Zeros de uma função afim, que dependem da noção de equação do primeiro grau;
- Função linear;
- Proporcionalidade;
- Fórmula de cálculo de perímetro de quadrado;
- Representações de função afim em aplicações de outras ciências e no cotidiano.

3.1.1 Exemplo de aplicação da grade de análise

Tipo de tarefa: Identificar situações de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado em exemplos contextualizados (EFai, EFaf, EM, ES).



Exemplo 3.7¹¹

H04 Representar, por meio de funções, relações de proporcionalidade direta, inversa, e direta com o quadrado.

Assinale a alternativa que traduz uma relação de proporcionalidade inversa entre X e Y.

- (A) X: peso das maçãs e Y: custo total das maçãs.
- (B) X: tempo gasto ao telefone e Y: conta mensal de telefone.
- (C) X: número de cavalos em um haras e Y: tempo de duração da ração que os alimenta.
- (D) X: distância entre duas cidades e Y: tempo que demora a percorrer essa distância.
- (E) X: renda anual do cidadão e Y: imposto de renda devido.

Figura 4: Exemplo de uma tarefa do SARESP (2015), que pode ser abordada em todas as etapas escolares.

Fonte: São Paulo, 2015, p.187

Técnica: identificar, a partir da leitura do enunciado de uma situação contextualizada, quando se trata de uma situação de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado.

Tecnologia: noções de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado.

Teoria: Teoria da proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado associada à noção de funções e as representações algébricas das funções: linear, $y = \frac{1}{x}$ e $y = ax^2$.

Objetos ostensivos: ostensivo língua natural e ostensivo algébrico intrínseco das funções: $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ e $y = ax^2$, onde a é uma constante e as representações simbólicas correspondem respectivamente à proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado.

Objetos não ostensivos: noção de gráficos e leitura e interpretação de texto. Noção de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado por meio dessa nomenclatura específica. Observamos que a nomenclatura usual é diretamente proporcional, inversamente proporcional e diretamente proporcional com o quadrado.

Quadro em que a tarefa é enunciada e resolvida: quadro das situações contextualizadas.

Ponto(s) de vista em jogo na tarefa: relação entre grandezas.

Níveis de conhecimento esperado dos estudantes: mobilizável em relação às noções de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado e disponível em relação às situações contextualizadas. O estudante precisa saber como as variáveis se relacionam, quando utilizadas no contexto da vida cotidiana.

Observação: trata-se de uma tarefa que pode ser abordada de diferentes maneiras, por meio de diferentes objetos ostensivos em todas as etapas escolares e que, mesmo não exigindo representações simbólicas, gerou dificuldades para os estudantes do 3º ano do Ensino médio, tendo um índice de acerto de apenas 19,20%, o que parece indicar a necessidade de desenvolver



situações contextualizadas mostrando seu sentido, muitas vezes sem recorrer ao objeto ostensivo algébrico, que pode ser considerado posteriormente para mostrar sua importância, quando se deseja formalizar, unificar e generalizar conceitos e noções matemáticas. Trata-se de um processo contínuo que exige a articulação dos conhecimentos prévios dos estudantes desenvolvidos nas diferentes etapas escolares.

Ressaltamos ainda que a nomenclatura proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado em geral não é utilizada, sendo a nomenclatura usual: diretamente proporcional, inversamente proporcional e diretamente proporcional com o quadrado. Além disso, nos exemplos considerados, existem contextos que podem não ser reconhecidos como cotidianos para os estudantes, pois dependem da vivência dos indivíduos, por exemplo o item e) X: renda anual do cidadão e Y: imposto de renda devido. Lembramos que a maioria dos estudantes terminam o Ensino Médio com idade entre 17 e 18 anos e, em geral, ainda dependem de um responsável.

4 Resultados

Ao nos questionarmos sobre: Quais conhecimentos prévios sobre a noção de função afim são considerados mobilizáveis ou disponíveis para os estudantes que iniciam um curso de graduação em Engenharia?, propusemo-nos a identificar as praxeologias habitualmente desenvolvidas na Educação Básica; para tanto, utilizamos documentos curriculares oficiais, livros didáticos e a macroavaliação SARESP.

Essas análises levaram-nos a um número restrito de praxeologias, mas é importante enfatizar que essas possibilitam tratar de uma diversidade de objetos ostensivos, quadros e pontos de vista, exigindo geralmente o nível mobilizável.

Se consideramos, mais especificamente, o Ensino Fundamental - anos finais (EFaf), o Ensino Médio (EM), identificamos 13 tipos de tarefas, sendo apenas 12 habitualmente desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem, a saber.

No quadro 1, apresentamos os 12 tipos de tarefas habituais, ressaltando que as 12 tarefas são tratadas explicitamente por meio de exemplos e exercícios propostos, mas a tarefa 13 apresentada anteriormente, como exemplo da grade de análise, não é tratada especificamente dessa forma, pois o não ostensivo apresentado na tarefa não condiz com o encontrado nos diferentes documentos analisados, uma vez que nesses documentos, a modelagem de situações contextualizadas é desenvolvida para casos particulares, com ênfase para os ostensivos de



representação simbólica e gráfica da função linear.

Quadro 1: Tipos de tarefas habituais desenvolvidas nos Ensino Fundamental - anos finais e Ensino Médio sobre a noção de função afim.

T1: Reconhecer uma função afim dada por meio do ostensivo algébrico explícito, identificando seus coeficientes. (EFaf, EM)
T2: Construir o gráfico de uma função afim. (EFaf, EM)
T3: Determinar os zeros ou a raiz de uma função afim. (EFaf, EM)
T4: Justificar por meio do ostensivo gráfico que uma função dada por meio do ostensivo algébrico intrínseco ($f(x) = ax$) ou explícito ($f(x) = 2x$) é linear. (EFaf, EM)
T5: Articular a noção de função linear com a noção de proporcionalidade. (EFaf, EM)
T6: Determinar o valor da função $f(x + h)$. (EM)
T7: Classificar as funções (afim) dadas por meio do ostensivo algébrico e gráfico. (EFaf, EM)
T8: Descobrir a função afim $f(x) = ax + b$ a partir de alguns valores dados. (EM)
T9: Descobrir qual das funções é função afim por meio de $f(x+h)-f(x)$. (EM)
T10: Relacionar as noções de progressão aritmética e função afim. (EM)
T11: Determinar domínio e imagem de uma função afim. (ES)
T12: Modelar uma situação contextualizada por meio de uma função afim. (EFaf, EM)

Fonte: Os autores.

Para os tipos de tarefas habituais, foi possível observar que as situações contextualizadas aparecem em todas as etapas escolares consideradas, exigindo que os estudantes reportem-se aos exemplos da vida cotidiana, da própria Matemática ou de outras Ciências. Observamos ainda que os tipos de tarefas encontrados no Ensino Fundamental - anos finais e Ensino Médio podem ser revisitados no Ensino Superior.

O tipo de tarefa T13, apresentado na **figura 2**, não corresponde a uma praxeologia desenvolvida na escola, tendo conduzido os estudantes a dificuldades mais acentuadas, pois mesmo parecendo um tipo de tarefa simples, exige o nível de conhecimento disponível sobre os contextos das situações apresentadas, o que implica a necessidade de situações de referência para tratá-las, exigindo maior atenção da parte dos educadores.

Observamos que nem sempre o que é simples indica que seja fácil de compreender, pois um tipo de tarefa simples como T13, que pode ser tratada em todas as etapas escolares por meio de diferentes objetos ostensivos, em particular no Ensino Fundamental - anos iniciais e finais, exige a compreensão da noção de variável dependente para situações contextualizadas, mas não necessita da utilização dos objetos ostensivos algébricos e gráficos, para os quais é dada ênfase



desde a introdução da noção de função afim no Ensino Fundamental - anos finais. As situações contextualizadas são desenvolvidas por meio do ponto de vista relação entre grandezas, o que mostra sua importância para o estudo das funções, conforme salienta Rogalski (2013) em seu artigo que faz um breve estudo epistemológico e didático associado à noção de função.

4.1 Análise da relação institucional esperada – documentos curriculares oficiais

Após essa breve discussão geral dos resultados, ressaltamos que a análise dos documentos curriculares oficiais permite observar que o Currículo Paulista, apesar de ter sido construído à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, distancia-se das orientações nacionais, quando consideramos o Ensino Médio, pois o tratamento indicado para o estudo da noção de função afim refere-se apenas ao ponto de vista relação entre grandezas, dando ênfase à questão da articulação entre grandezas diretamente proporcionais. Já, o Guia de transição parece estar mais afinado com a BNCC, pois identifica o Currículo Oficial (vigente até 2018), que corresponde à indicação do Currículo que vigorava até 2018 com a nova proposta de Currículo Paulista, em que tema e conteúdo considerados no Currículo oficial são transformados em tema e objetos de conhecimento, conforme indica a BNCC; e as habilidades são as preconizadas na BNCC.

Já, para o Ensino Médio, não são explicitadas as habilidades, sendo indicada apenas a competência geral, ou seja, a articulação entre o Currículo Oficial e a BNCC parece ser um objeto ainda em estudo.

Finalmente, ao comparar os documentos nacionais e paulista, verificamos que existe uma discrepância, quando consideramos os estudantes paulistas, em relação ao que se considera como conhecimento prévio disponível no Ensino Superior, pois o estudo da função afim no Currículo Oficial de São Paulo previa apenas o desenvolvimento da noção de função, segundo o ponto de vista relação entre grandezas, enquanto, para o estudo da disciplina de Cálculo, supõe-se que os estudantes mobilizem conhecimento de função enquanto relação entre conjuntos, em particular o conjunto dos números reais, o que indica a importância de se considerar o ponto de vista relação entre conjuntos no Ensino Médio.

4.2 Análise das relações institucionais existentes – livros didáticos

A análise das relações institucionais esperadas, via livros didáticos, mostra que o ensino da noção de função afim proposto nos livros didáticos de Dante (2016) e Dante; Viana (2022)



para o Ensino Fundamental - anos finais e Dante (2017) para o Ensino Médio é coerente com as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Trata a noção de função afim segundo o ponto de vista relação entre grandezas no 9º ano e relação entre conjuntos no primeiro ano do Ensino Médio, após uma revisita ao ponto de vista relação entre grandezas. Tanto para o livro do Ensino Fundamental, como para o livro do Ensino Médio, o autor dá ênfase a situações contextualizadas, mas vale notar que seria importante abordar exemplos que correspondam à realidade e utilizar mais situações relacionadas às outras ciências.

Ressaltamos que, em relação ao Currículo Oficial (vigente até 2018), o livro está condizente com a proposta para o Ensino Fundamental - anos finais, mas não contempla as orientações desse currículo, que só indicam o estudo do caso particular da proporcionalidade em relação à noção de função afim, considerando apenas o ponto de vista relação entre grandezas. Observamos que Dante (2017) e Souza (2021), para o Ensino Médio, introduzem a noção intuitiva de conjuntos e o conjunto números reais, que implicam um conhecimento a ser mobilizado quando da introdução da noção de função afim enquanto relação entre conjuntos. Souza (2021), por se tratar de uma obra que segue as orientações da BNCC, indica as habilidades referentes a cada tema e tópicos desenvolvidos no livro, sendo que esse representa o primeiro volume da coleção para o Ensino Médio e que nos parece mais adequado à proposta de estudo indicada na BNCC, que não especifica o ano escolar em que devem ser desenvolvidos setores, temas e tópicos, o que fica a critério do professor revisitá-los quando necessário.

4.3 Análise da relação pessoal esperada - macroavaliação SARESP

A análise da relação pessoal esperada, via macroavaliação SARESP, mostra que ela é construída sob a ótica do Currículo Oficial (vigente até 2018), o que torna compreensíveis as praxeologias encontradas nas tarefas disponibilizadas nos relatórios anuais. Observamos nessas tarefas a ênfase dada ao ensino de função afim centrada na noção de proporcionalidade direta, o que parece um facilitador em relação ao que se espera do estudante que termina o Ensino Médio e inicia o Ensino Superior.

Acreditamos que, com a BNCC, seja dada uma nova ênfase ao desenvolvimento da noção de função afim para os estudantes do Ensino Médio. Enfatizamos aqui que esta pesquisa tem possibilidades de continuidade, uma vez que sobre a BNCC, só foi possível identificar um conjunto de competências e habilidades que parecem exigir um trabalho dos educadores para



materializar o prescrito no documento e que o novo Ensino Médio será realmente iniciado em 2025, após divergências entre proposta e dificuldades de implementação.

A análise do livro de Cálculo para o primeiro ano do Ensino Superior de um curso de Engenharia tende a mostrar que as relações institucionais existentes estão alinhadas com as diretrizes para esse curso.

A dificuldade que parece se impor está relacionada com a expectativa institucional sobre os conhecimentos mobilizáveis dos estudantes, pois grande parte dos estudantes do Ensino Superior paulista cursaram escolas públicas, nas quais o ponto de vista relação entre conjuntos depende apenas da convicção e concepção pessoal dos professores.

Ponderamos ainda que o livro de Stewart (2015) apresenta a noção de função afim enquanto modelo linear; logo, para o autor, o caso particular da função linear não é considerado, o que pode corresponder a um obstáculo didático para os estudantes que precisam ser informados sobre o modo como o autor como Stewart, cujo livro foi analisado na pesquisa, trata essas noções sob diferentes pontos de vista.

5 Considerações finais

A problemática da pesquisa estava diretamente relacionada à busca de uma resposta sobre o porquê do grande número de evasão e desistência dos alunos de graduação, especialmente dos cursos de Engenharia, o que nos conduziu aos resultados do SARESP (São Paulo, 2002 até 2022), considerando a possível trajetória dos estudantes desde o 3º ano do Ensino Fundamental, o que revela dificuldades em Matemática, que parece tenderem a aumentar, conforme o estudante avança em sua escolaridade, sendo preocupante seu desempenho no 3º ano do Ensino Médio.

Para este estudo, consideramos apenas a noção de função afim, pois se trata de uma ferramenta entendida como sendo explícita para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, quando do estudo da noção de derivada de uma função num ponto, conceito introduzido nessa disciplina nos primeiros anos de Engenharia, o que pode ser um dos motivos da evasão de estudantes nesses cursos nos dois primeiros anos.

A análise dos documentos curriculares oficiais e dos livros didáticos mostra que existe uma coerência entre o que era proposto e o que os autores apresentavam, mas no que tange ao material específico das escolas públicas, essa relação entre documentos curriculares oficiais nacionais e estaduais não é harmoniosa. Apesar da coerência entre as relações institucionais



esperadas e existentes, observamos que a Matemática trata a relação de proporcionalidade entre duas grandezas considerando o coeficiente “a” da função linear $f(x) = ax$ como um número, não levando em conta as unidades de medida das grandezas em jogo, o que se repete em outras culturas, pois essa falta de relação entre grandezas e medidas foi observada na pesquisa de Artaud (2019) para a proporcionalidade, o que sinaliza ser um fator que pode bloquear a compreensão dos estudantes, quando da aplicação dessa função nas outras Ciências, em particular, na Física, que é uma disciplina fundamental para os cursos de Engenharia.

Algumas propriedades específicas das funções não são desenvolvidas, uma vez que o ponto de vista relação entre conjuntos não é tratado explicitamente nos materiais, ficando a cargo dos professores fazer a relação entre esse material e o livro didático, que é uma opção das escolas, as quais, na sua maioria, seguem as orientações nacionais, pois são avaliadas pelo Ministério da Educação com base nos documentos nacionais. Com as mudanças atuais nas escolas públicas paulistas, para as quais o livro didático não é mais obrigatório a partir de 2022, podemos supor que novas dificuldades podem manifestar-se, em particular nas macroavaliações nacionais como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Salientamos ainda que, na macroavaliação SARESP, as tarefas encontradas nos relatórios que estavam relacionadas com habilidades associadas à noção de função afim, em geral, não necessitavam desse conhecimento, podendo muitas vezes serem resolvidas mentalmente ou utilizando a noção de regra de três, o que parece um elemento importante, uma vez que, no Ensino Superior, a noção de função afim considerada como mobilizável exige, tanto o ponto de vista relação entre grandezas, quanto o ponto de vista relação entre conjuntos. É necessário, para esse último, optar pelos objetos ostensivos mais adequados para o desenvolvimento de novos tipos de tarefas e aplicar as propriedades da função afim na introdução de novos conhecimentos, isto é, o ponto de vista relação entre grandezas servindo para criar as imagens mentais necessárias para reconhecer a importância do ponto de vista relação entre conjuntos para a formalização, unificação e generalização dessa noção, permitindo assim utilizá-lo na introdução de novos conhecimentos.

Sendo assim, mesmo considerando a análise das relações pessoais esperadas dos estudantes pouco profunda, visto que utilizamos apenas os dados do SARESP, mesmo sendo possível observar que esses dados parecem repetir-se na avaliação nacional Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e na avaliação internacional Programa Internacional de



Avaliação de Estudantes (PISA), acreditamos que ela nos apresenta indícios sobre as dificuldades que enfrentam os estudantes que iniciam o Ensino Superior, mais particularmente, aqueles que se direcionam às carreiras em que a Matemática serve de ferramenta explícita para a sua compreensão.

Observamos, finalmente, que durante o Ensino Médio, foi apresentada aos estudantes uma diversidade de noções matemáticas, mas como essas são pouco articuladas, não é dado enfoque à escolha do objeto ostensivo mais adequado e à passagem de um a outro, o que pode dificultar a compreensão da necessidade desses objetos. O nível de conhecimento esperado dos estudantes pode variar em função das escolhas dos professores, o que parece criar uma diversidade de relações pessoais que precisam ser consideradas pelos professores do Ensino Superior de modo a identificar o que precisa ser revisitado e o que pode ficar sob a responsabilidade dos próprios estudantes, lembrando que não é possível revisar toda a Matemática desenvolvida na Educação Básica.

Referências

- Artaud, M. (2019). Besoins praxeologiques de la profession: le cas des grandeurs et de leurs mesure. *Annales de la XXe école d'été de la ARDM de Autrans*. Grenoble, França, 2019
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble, v. 1, n.1, p. 77 – 124.
- Brasil. (2019). *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/marco-2019-pdf/109871-pces001-19-1/file>. Acesso em: 02 jul. 2020.
- Brasil. (2016). *Panorama da Educação*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/eag/documentos/2016/destaques_do_p_anorama_da_educacao_2016_eag.pdf. Último acesso em: 23 de ago. 2024.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Último acesso em: 28 ago. 2024.
- Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Último acesso em: 28 ago. 2024.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Último acesso em: 28 ago. 2024.
- Brasil. (2019). *Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia*. Disponível em:



<https://cdn1.unasp.br/home/2019/04/30062014/1.2019-Resolu%C3%A7%C3%A3o-CNE-CES-2-de-24-04-2019-Eng-Civil.pdf> Último acesso em: 24 de ago. 2024.

Chevallard, Y. (2011). *Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=150. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1.S tructures & Fonctions. In: *Actes de la XI école d'été. Leçons de didactique*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_1.pdf. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, v.17, n.3, p. 17 – 54.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, v.12 n.1, p. 73 – 112.

Dante, L. R. (2016). *Projeto Teláris: Matemática*. São Paulo: Ática.

Dante, L. R.; Viana, F. (2022). *Projeto Teláris Essencial: Matemática*. São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2017). *Matemática: Contexto e aplicações*. São Paulo: Ática.

Dias, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» de l'algèbre linéaire*. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758>. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, n.6, p. 132- 158.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665>. Último acesso em: 28 ago. 2024.

Godoy, A. S. (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57-63.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.18, n.2, p.139–190.



- Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualization et enseignement secondaire. In J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, p. 149-157.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In: *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Paris: IREM Paris 7.
- Rogalski, M. (2013). Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v.6, n.1, p. 147 – 169.
- São Paulo (Estado) (2019). *Currículo Paulista*. Disponível em: http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf Último acesso em: 22 ago. 2024.
- São Paulo (Estado) (2002 a 2019). *SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo*. Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/consulta-saresp.html> Último acesso em: 27 ago. 2024.
- São Paulo (Estado) (2021). *SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, Saresp em revista*. Disponível em: https://saresp.fde.sp.gov.br/Arquivos/SumarioExecutivo_SARESP_2021.pdf Último acesso em: 26 ago. 2024.
- São Paulo (Estado) (2022). *SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo*. Disponível em: https://saresp.fde.sp.gov.br/Arquivos/SumarioExecutivo_SARESP_2022.pdf Último acesso em: 27 ago. 2024.
- Souza, J. (2021) *Multiversos Matemática: Conjuntos e Função Afim*. São Paulo : FTD.
- Stewart, J. (2013) *Cálculo*. São Paulo : Cengage Learning.